経済分析

第93号　昭和59年3月

☆大規模計量経済モデルの構造解析・
　解法・推定について

経済企画庁経済研究所編集

本 誌 の 性 格 に つ い て

本誌は，研究所員の研究試論である。この種の成果は，研究所内部においても検討中のものであるが，現在研究所でどういう研究が進行しつつあり，どういう考え方が生まれつつあるかを外部の方々に知っていただくと同時に，きたんのない批判な仰ぐことを意図するものである。そのために，掲載は研究員個人の名義であり，研究所としての公式の見解ではないことを含まれたい。

経　済　分　析

第　　93　　号

昭和59年3月　　　　　　　　経済企画庁経済研究所

目　　　　　次

＜分析＞

大規模計量経済モデルの構造解析・解法・推定について

＜分析＞

大規模計量経済モデルの構造解析・解法・推定について*

伊藤（いとう）征一（せいいち），佐々木（ささき）隆博（たかひろ），伴（ばん）金美（かねみ）
藤井（ふじい）健二（けんじ），矢萩（やはぎ）恵一（けいいち），Jean-Louis Brillet＊＊

は　し　が　き

本稿は，大規模計量経済モデルの構造解析，解法及び推定に関する諸問題に対処するために提案されたいくつかの方法を，若干の実験結果を用いて比較検討しようとするものである。ここで実験的に扱われているモデルは，経済企画庁経済研究所で開発中の世界経済モデルのうちの日本及び西独経済モデルであり，世界経済モデル全体の規模と比較すれば小さなものである。しかしながら，モデルを推定し解く場合に生ずる問題は大規模な全体モデルの場合と全く同じであり，実験に用いるには十分な規模であると考える。

計量経済モデルの大規模化は，方程式と変数の数を著しく増大させるが，その一方で方程式と変数間の関係を不明確なものにする傾向がある。このような大規模計量経済モデルにおける各方程式と変数の関係を分析することは，モデルの開発過程で重要な役割を持つ。大規模計量経済モデルの特徴の1つは，方程式と変数間の関係が疎（sparse）である（個々の方程式に含まれる変数がモデル全体に含まれる変数に比べて著しく少なく，連立方程式体系のほとんどの係数がゼロとなっている）ことである。このような関係を分析するための方法は，大規模線型連立方程式モデルや大規模線型計画法などの数値解法の分野で発展したものであるが，連立方程式で構成されている計量経済モデルへも十分適用することができる。その方法によれば，大規模モデルもブロック化することにより，より小さいモデルへの分割が可能となる。これは方程式あるいは変数をグループ化することであり，このブロック分割によりその構造を明確な形で整理することが可能となる。

次に，問題となるのは大規模計量経済モデルを解くための方法である。世界経済モデルをはじめ，多くのモデルは非線型連立方程式から成る。この方程式体系を解くためには，通常ガウス・ザイデル法とよばれる反復代入法が用いられる。この方法は非線型連立方程式体系を比較的効率よく解く方法として知られており，経済企画庁の世界経済モデルもこの方法で解かれている。しかしながら，ガウス・ザイデル法は方程式の順序により収束回数が著しく異なるのみならず，解が存在してもモデルを解くことができない場合もある。一方，ニュートン法とよばれる解法は比較的小規模の非線型連立方程式体系の解法として工学的分野でよく用いられており，解の精度もガウス・ザイデル法と比較して高いことが知られている。

これまで，大規模計量経済モデルへのニュートン法の適用については否定的な考え方が強

＊　本稿の作成にあたっては，当研究所の世界経済モデル・グループの方々に負う所が大きい。付記して謝意を表わす。

＊＊　J. L. Brillet氏は，フランス国立統計経済研究所（INSEE）の中期予測部モデル分析室長であるが，当研究所が本分析を行う目的で招へいした研究者である。

く，解法として用いられることが少なかった。しかし，大規模計量経済モデルにおける方程式と変数との関係が疎である構造的特性を利用すれば，ニュートン法の適用も十分に可能であり，解の精度を高めるためにも望ましいことが最近明らかになりつつある。本稿では，ガウス・ザイデル法以外の解法としてニュートン法などを比較検討の対象とする。

最後に，大規模計量経済モデルを推定するうえで生ずる問題として同時方程式体系の扱いがある。世界経済モデルの各パラメータは原則として最小二乗法を用いて推定されている。ところが，同時方程式体系を最小二乗法で推定すると，いわゆる「最小二乗バイアス」が発生することが知られている。この問題に対しては，二段階最小二乗法や制限情報最尤法をはじめとするいくつかの同時推定法が提案されている。特に，最近の大規模計量経済モデルの推定量に関する小標本理論によれば，制限情報最尤推定量あるいはそれを若干修正した方法が，最小二乗推定量や二段階最小二乗推定量よりも望ましいとされている。本稿では，このような異なる推定量を用いてモデルを推定し，比較検討する。

第1章　大規模計量経済モデルの構造解析

1−1　は じ め に

連立方程式体系として記述される計量経済モデルは，モデルに含まれる方程式と変数との関係が疎（sparse）となる特有な性質を持つ。すなわち，個々の方程式に含まれる変数がモデル全体に含まれる変数と比較して著しく少なく，他の大部分の変数は係数のゼロ制約条件によりその方程式から除かれている。このような計量経済モデルに特有な性質を十分に考慮することは，大規模化しつつあるモデルの推定と解法を効率的に行うために重要な意味を持つ。本章では，特に内生変数と各方程式の関係に視点を置いて分析する。これは，モデルの推定と解法において，先決変数（先決内生変数及び外生変数）が常に所与として扱われていることによ

表1. 1　簡単な日本経済モデルの構造

方程式 ＼ 内生変数	*C*	*IP*	*GNP*	*K*	*L*	*P*	*W*	*YO*	*YP*
(1)	*					*			*
(2)		*	*						
(3)	*	*	*						
(4)		*		*					
(5)			*		*	*	*		
(6)						*	*		
(7)			*		*	*	*		
(8)			*			*		*	
(9)					*		*	*	*

（注）　＊は各内生変数がその方程式に含まれ，ブランクは除かれていることを意味する。

る。本章における「構造」という用語はこのような内生変数と各方程式の関係を指すものとする。

表1.1は，付録1における9本の方程式からなる簡単な日本経済のマクロモデルについて，内生変数と方程式との関係を行列形式で表現したものである。これは，線型の連立方程式体系

$$By+\Gamma x=0 \tag{1.1}$$

$y(G\times 1)$ ：内生変数ベクトル

$x(K\times 1)$ ：外生変数ベクトル

$$\left.\begin{array}{l} B(G\times G)\ : \\ \Gamma(G\times K)\ : \end{array}\right\} \text{係数行列}$$

における係数行列Bに対応するものである。すなわち，表1.1の＊は行列Bの非ゼロ要素に，ブランクはゼロ要素に対応している。＊の全体$(G\times G)$に占める比率は行列の密度とよばれるが，表1.1のモデルの場合は33％である。一般に行列の規模は方程式の本数の2乗に比例して拡大するが，非ゼロ要素である＊の数は方程式に単純比例するだけである。従って計量経済モデルの規模の拡大に伴う構造行列の密度は急速に低下する。

（1.1）式の線型モデルの場合，解は

$$y=-B^{-1}\Gamma x \tag{1.2}$$

として表わされる。すなわち，解ベクトルyを計算するためには，係数行列Bの逆行列を求めることが必要である[(注)]。この場合，行列Bが疎であれば逆行列を計算する方法を工夫することにより，計算機を用いる際のメモリー量と計算時間を大幅に軽減することが可能となる。(Curtis and Reid［1971］)。一方，非線型モデルの場合は，

$$f(y,\ x)=0 \tag{1.3}$$

$y(G\times 1)$ ：内生変数ベクトル

$x(K\times 1)$ ：外生変数ベクトル

（注） 実際に方程式体系を解く場合は，逆行列B^{-1}を計算するわけではなく，ガウス消去法などで行われているように，行列Bを三角行列へ変換して代入法などを用いる。以下の議論は行列を三角行列へ変換する過程で重要な問題となる点である。

$f=(f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots,\ f_G)'$：関数ベクトル

と表わされる。（1.3）をy_0の近傍で展開すれば，

$$f(y_0,\ x)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=y_0}(y-y_0)=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1},\frac{\partial f_1}{\partial y_2},\cdots\cdots,\frac{\partial f_1}{\partial y_G} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1},\frac{\partial f_2}{\partial y_2},\cdots\cdots,\frac{\partial f_2}{\partial y_G} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_G}{\partial y_1},\frac{\partial f_G}{\partial y_2},\cdots\cdots,\frac{\partial f_G}{\partial y_G} \end{pmatrix}$$

となる。（1.4）式は，（1.1）式と同じ線型の連立方程式体系である。この場合，表1.1の構造は一次の偏微分係数行列 $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{y=y_0}$ に対応している。したがって，ニュートン法などのような非線型モデルの解法に用いられる方法を適用する場合でも，線型モデルの解法におけると同じ計算上の工夫が必要となる。

以下においては大部分の要素が0である疎行列（sparse matrix）によって表現される大規模連立方程式体系を解く際の工夫について述べる。これはガウスの消去法における前進消去式の算法を用いて説明することができる。一般に，連立方程式体系を

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots\cdots+b_{1G}y_G=a_1 \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots\cdots+b_{2G}y_G=a_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ b_{G1}y1+b_{G2}y_2+\cdots\cdots+b_{GG}y_G=a_G \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

とし，これをガウス消去法を用いて解くものとする。すなわち．第k回目のステップにおいて第k行の係数全体に同一の値を乗じ，下の行から減ずる。その際乗ずる数は，下の行のk番目の係数がゼロになるように，行毎に異る値を用いるものとする。また第k行自体は，そのk番目の係数が1になるように，全体をk番目の係数で除しておく。この場合，第k行をピボット行と呼ぶ。この，k回目のステップにより各係数は次のようになる。

$$b_{kj}^{k}=b_{kj}^{k-1}／b_{kk}^{k-1},\quad a_{k}^{k}=a_{k}^{k-1}／b_{kk}^{k-1}$$

$$\left.\begin{aligned} b_{ij}^{k} &= b_{ij}^{k-1} - \left(\frac{b_{ik}^{k-1}}{b_{kk}^{k-1}}\right)\cdot b_{kj}^{k-1} \\ a_{i}^{k} &= a_{i}^{k-1} - \left(\frac{b_{ik}^{k-1}}{b_{kk}^{k-1}}\right) a_{k}^{k-1} \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

$$k \leqq j \leqq G$$
$$k \leqq i \leqq G$$

このステップをくり返すことにより，Gステップ目で，連立方程式体系（1.5）は次のように変換される。

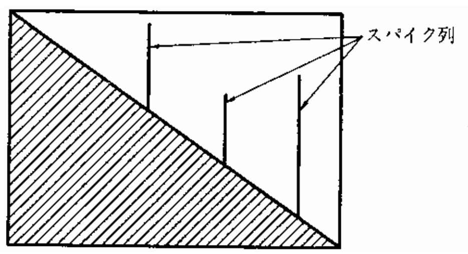
$$\left.\begin{aligned} y_1 + b_{12}^{1} y_2 + b_{13}^{1} y_3 + \cdots\cdots + b_{1G}^{1} y_G &= a_1^{1} \\ y_2 + b_{23}^{2} y_3 + \cdots\cdots + b_{2G}^{2} y_G &= a_2^{2} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ y_G &= a_G^{G} \end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

（1.5）式の（1.7）式への変換を一般に行列の三角化とよぶ。連立方程式体系が（1.7）式のように変換されれば，解は（1.7）式の最後の式から順番に y_G，y_{G-1},……，y_1 と逐次代入することにより計算できる。ガウス消去法の過程のなかで重要と考えられるのは，いわゆる前進消去式とよばれる。

$$b_{ij}^{k} = b_{ij}^{k-1} - \left(\frac{b_{ik}^{k-1}}{b_{kk}^{k-1}}\right) b_{kj}^{k-1}$$

である。この式で $b_{ij}^{k-1}=0$，かつ $b_{kj}^{k-1}=0$ であれば $b_{ij}^{k}=0$ となる。一方，$b_{ij}^{k-1}=0$ であっても $b_{kj}^{k-1} \neq 0$ であれば $b_{ij}^{k} \neq 0$ となる。計算の過程で常に $b_{ij}^{k}=0$ となることが明らかな要素については，計算機上にメモリーを占有する必要がなく，実際の計算も必要でない。ところが後者のように，$b_{ij}^{k-1}=0$ なのに $b_{kj}^{k-1} \neq 0$ の場合は，k ステップ目で b_{ij}^{k} は非ゼロとなる 。このような b_{ij} については，あらかじめメモリーを準備する必要が生ずる。このように計算過程の途中で非ゼロとなる要素は，一般にフィルイン（fill-in）とよばれる。（Drud［1978］，深尾・渡辺［1982］）フィルインの発生は，計算に必要なメモリーと計算量を増大させる。フィルインは，ガウスの前進消去過程で，ピボット行のなかに $b_{kj} \neq 0 (k<j)$ となる要素が存在する時に，当該行より下の行の第 j 列に発生する。即ち，図1.1の対角線の右側に非ゼロ要素が存在する時，その要素の下側に発生する。Hellerman and Rarick［1972］では，フィルインが発生する列をスパイク列とよんでいる。図1.1スパイク列を表わしたものである。疎行列（sparse matrix）からなる連立方程式体系を解く場合の工夫は，このようなフィルインの発生をどのようにして少なくするかという点にある。これは一般に消去の順序の選択として知られている。

図1.1　行列におけるスパイク列



（注）　右上三角部分は，スパイク列以外はすべてゼロである。斜線部は，$b_{ij}=0$，$b_{ij} \neq 0$ が混在する部分。空白部は，全て $b_{ij}=0$ となる部分。

計量経済モデルの場合は各方程式によって解かれる変数が陽関数の形で事前に決められているため，消去の順序の選択は方程式の順序の選択と言い換えることができる。これは，グラフの理論で最小帰還点集合（minimum feedback vertex set）を求める問題として知られている。（伊理・恒川・室田［1982］）しかし，この問題に対する一意的な最適解は存在しないことが証明されている。ただ，フィルインをなるべく少なくするための近似的解法はいくつか提案されており，本章ではそれらを計量経済モデルへ適用することを試みる。

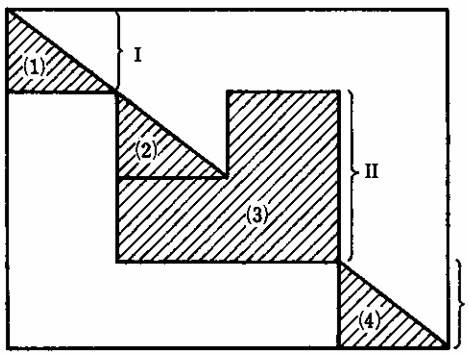
表1. 2　再順序化された簡単な日本経済モデル

内生変数（方程式）

	P	*L*	*W*	*YO*	*YP*	*C*	*IP*	*GNP*	*K*
(6)	*		*						
(5)	*	*	*					*	
(7)	*	*	*					*	
(8)	*			*				*	
(9)		*	*	*	*				
(1)	*				*	*			
(2)							*	*	
(3)						*	*	*	
(4)							*		*

（注）　□部分はスパイク列を意味する。

図1. 2　連立方程式体系のブロック化



（注）　下三角部分は全て斜線でもよい。

表1.2は表1.1で示される日本経済に関する簡単なマクロモデルを並び替えて再順序化したものである。この場合のスパイク列は賃金*W*と国民総生産*GNP*の2つである。スパイク列が存在しない構造であれば，そのモデルは逐次決定体系とよばれるものになる。一方，表1.2に示されるようなスパイク列が存在する場合はスパイク列に対応する内生変数*W*および*GNP*を通してモデルは同時決定体系となる。一方，表1.2の資本ストック*K*のような変数は他の変数に対して何らの影響も与えない。

このように方程式の並べ替えによってスパイク列をなるべく少なくしたモデルへ再構成することは，フィルインの発生を少なくして計算量を減少させるのみならず，計量経済モデルに含まれる変数間の関係を整理するうえでも重要な情報を与えてくれる。

方程式体系を並び替えて再順序化を行なうことにより全体系は一般に図1.2で示されるようなブロック化された体系へ再構成される。図1.2の場合，連立方程式体系は（I），（II），（III）の3種類のブロックに分割される。第IIブロックは，さらに ⑵，⑶ の小ブロックからなるヘリ付三角行列（bordered triangular matrix）となる。ここで，ブロック ⑶ はスパイク列に対応する。計量経済モデルは，一般にヘリ付三角行列を基本単位とするブロックリカーシブ体系（block recursive system）として再構成することができる。大規模計量経済モデルについても，ブロック化することができれば，各ブロックごとにモデルを解くことができ，計算量は著しく減少する。図1.2の場合，まず第Iブロックを解き，次いで第IIブロック，最後に第IIIブロックを解くというように，逐次的に解くことができる。その際，第IIブロックで表わされているような，スパイク列をなるべく少なくしたヘリ付三角行列を作りフィルインの発生を少な

くすれば計算量をさらに軽減することができる。(注1)

以上述べたことをまとめると次の通りである。大規模計量経済モデルを解くための計算量を軽減するため，(i) 全体系をブロック分割し，ブロックリカーシブとする。(ii) 各ブロックごとに，スパイク列をできるだけ少なくしたへリ付三角化を行なう。体系全体に対するこのような構造解析は，モデルに含まれる変数をグループ化し，グループ間の相互関係を明らかにする。その結果としてモデルで中心的役割を果すグループの特定化が可能となり，モデルを運用する際に有用な情報となる。すなわち，計量経済モデルの大規模化の傾向は，変数間の相互関係をあいまいなものにしてしまう方向にあるが，本章で述べるような構造解析の手法は，ブロック化を通してそれらの関係を再整理する働きがある。

以下においては構造解析の代表的な方法であるSteward［1962］，Hellerman・Rarick［1971］とNepomiastchy・Ravelli［1978］の方法を実際の計量経済モデルへ適用して比較検討を行なう。(注2) このなかで，StewardとHellerman・Rarickの2つの方法は，モデルが効率的に解かれるように個々の方程式で解かれるべき変数を指定する方法を含んでいる。(注3) 計量経済モデルを扱う際に，同時方程式体系を機械的に解くという立場からすればそれを効率的に行なうためにこのような変数の指定方法は重要である。しかしながら，前述のように計量経済モデルにおける個々の方程式は，それぞれが1つの経済理論に基づいており，各方程式が何を決定するかは事前に特定化されているのが普通である。本章における構造解析は，単に大規模計量経済モデルを効率的に解くということだけではなく，モデルの構造を把握するということをも目的としており，その意味で各方程式が意味する因果関係を損うことは望ましくない。したがって本章では各方程式で解かれる変数を指定する方法は扱わない。例えば，消費関数で可処分所得を決定したり，GNPの定義式から消費支出を決定したりすることはないものとする。(注4) この意味において解析された構造は従来と同じ経済的因果関係を表わしている。

1－2　Stewardの方法

Steward（1962）は，連立方程式体系をブロック化するための簡単なアルゴリズムを提案したこの方法は*TSP*，*SAS*，*TROLL*(注5) など計量経

（注1）　本章と同じ意図に基づく構造解析手法を組み入れた計量経済モデル開発システムとしては，EPLAN (Econometric Planning Language, IBM［1977］), EMS（Econometric Modelling System，森［1978］), MODULECO (Modular System for Economists, Oudet and Nepomiastchy［1981]) などがある。構造解析の手法として，EMSについては明らかでないが，EPLANはGiessen［1970]，MODULECOはNepomiastchy・Ravelli［1978］によっている。

（注2）　Boutllier［1982］は構造解析の手法の比較研究のなかで Tarjan［1972］がスパイク列を少なくする点では優れていることを実証している。ただ，方法が複雑なため今回は省略した。

（注3）　方程式で決定される変数は規準化変数（normalized variables）とよばれる。

（注4）　2－1で述べられているように，ガウス・ザイデル法で解が収束しない場合に，規準化変数を変更することで収束解が得られることがある。

（注5）　TSP (Time Series Processor)
Bronwyn H. Hall
204 Junipero Serra Blvd.
Stanford, CA 94305, USA
SAS (Statistical Analysis System)
SAS Institute, Inc.
Box 8000
Cary, NC 27511, USA
TROLL (Time-shared Reactive On-Line Laboratory)
Center for Computational Research in Economics & Management Science
1, Amherst Street
Building E40－148
Cambribge, MA 02193, USA

済モデル開発用の代表的なソフトウエアシステムで一般的に用いられているものである。ただ，Stewardの方法は連立方程式体系をブロック化するが，図1.2の第IIブロックに示されるような，ブロック内でスパイク列を最小化したヘリ付三角行列を作成することはできない。そのため本章では分割された個々のブロックについてさらに修正されたStewardの方法によって上記のようなヘリ付三角化ができるようにする。

Stewardのブロック化は，グラフの理論に基づいている。いまモデルが下記のようにG本の連立方程式体系で記述されているものとする。

$$\left.\begin{aligned} y_1&=f_1(y_2,\ y_3,\cdots\cdots,\ y_G)\\ y_2&=f_2(y_1,\ y_3,\cdots\cdots,\ y_G)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_G&=f_G(y_1,\ y_2,\cdots\cdots,\ y_{G-1})\end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

この連立方程式体系に対応する行列を下記のように定義する。

$$B=(b_{ij}) \quad i,\ j=1,2,\cdots\cdots,\ G$$

$$b_{ij}=\begin{cases}1: \text{変数 } y_j \text{が方程式} i \text{に含まれる}\\ 0: \text{その他}\end{cases}$$

この行列Bを二値行列(binary matrix)という(注)。

例えば，表1.1の簡単な日本経済モデルを二値行列Bで表現すると次のようになる。

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&1&1&1\end{pmatrix} \qquad (1.9)$$

次に行列Bの累乗

$$B^2=B\cdot B=\left(\sum_{k=1}^{G} b_{ik}\cdot b_{kj}\right)$$

（注）　Bの対角要素を0に変えて転値した行列は，グラフの理論で隣接行列（adjacency matrix）として知られているものである。

をブール算法

$$\begin{cases}0\cdot 0=0\cdot 1=1\cdot 0=0\\ 1\cdot 1=1\\ 0+0=0\\ 0+1=1+0=1+1=1\end{cases}$$

に基づいて行なう。

ここでB^2の要素$b_{ij}^{(2)}$が1となるためには，

$$\sum_{p=1}^{G} b_{ip} b_{pj}=1$$

すなわち，少くとも1つのpについて$b_{ip}\cdot b_{pj}=1$となることが必要である。これが成立するのは$b_{ip}=1$かつ$b_{pj}=1$の場合である。これは, 変数y_jが変数y_pを経由して変数y_iに影響することを意味する。さらに$B^3=B^2\cdot B$の要素$b_{ij}^{(3)}$が1となるためには

$$\sum_{q=1}^{G} b_{iq}^{(2)}\cdot b_{qj}=1$$

すなわち少くとも1つのqについて$b_{iq}^{(2)}\cdot b_{qj}=1$となることが必要である。これが成立するのは$b_{iq}^{(2)}=1$かつ$b_{qj}=1$の場合である。$b_{iq}^{(2)}$について前述の結果を利用すれば，上記の条件は少くとも1つのp，qについて$b_{ip}=1$かつ$b_{pq}=1$かつ$b_{qj}=1$となることである。これは変数y_jが変数y_q，y_pを経由して変数y_iに影響することを意味するB^4，B^5……についても同様のことが言える。

また，Stewardによれば二値行列Bの累乗B^kに関して，結合行列の累乗の性質から$\ell\leqq G$でかつ$B^{\ell-1}\neq B^{\ell}=B^{\ell+1}$となる$\ell$が存在する。(1.9）の場合は$\ell=4$となる。この時

$$B^4=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&1&1&1&1\end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

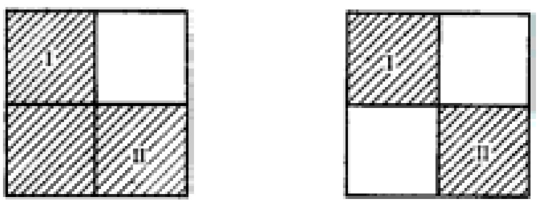
となり，第4列に対応する変数Kは他のすべて

の変数から影響を受けているが，他のどの変数にも影響を与えていないことがわかる。またK以外のすべての変数は相互に影響しあっていることがわかる。連立方程式体系のブロック化は，二値行列Bの累乗B^{ℓ}を用いて行なうことができる。すなわち，B^{ℓ}の行（あるいは列）について同一の値を持つ行（あるいは列）を1つのブロックとすればよい（1.10）の例では，第Iブロック（C, IP, GNP, L, P, W, YO, YP）と第IIブロック（K）の2群に分割されることが分かる。もし行列Bの全ての要素が1になる場合は，すべての変数が何らかの変数を媒介として互いに関係していることを意味しており分割不可能な単独ブロックとなる。

次に分割された各ブロックの関係を（1.10）の例で見てみると，第Iブロックは第IIブロックに影響を与えるのに対して，第IIブロックは第Iブロックへ影響を与えない。このような場合，第Iブロックは第IIブロックに先行すると言う。一方，いずれのブロックも先行する関係にない場合，両者は対等であると言う。図1.3は先行関係と対等関係を図示したものである。

図1. 3　先行関係・対等関係

（a）　先行関係　　　　（b）　対等関係



構造解析の第2段階は上記のように分割された各ブロックについてフィルインを発生させるスパイク列をできるだけ少なくしたヘリ付三角化を行うことである。このような分割されたブロック内での構造解析の方法についてStewardは何も述べていない。そこで，本節ではStewardのブロック分割手法を応用してヘリ付三角化を行なう方法について述べることとする。まずブロック内で説明変数として最も多くの方程式を説明する変数から順にスパイク変数の候補として取り上げる。次にその変数をブロックから除いた場合に，残りの変数群がStewardの方法でブロック分割可能であれば，その変数をスパイク変数とし，残りの変数についてブロック分割を行なう。分割不可能であれば次に多くの方程式を説明する変数をスパイク変数の候補として同じ操作を行なう。スパイク変数の候補として適当なものがなくなるまで，以上の手順をくり返すと，結果としてスパイク列をできるだけ少なくしたヘリ付三角行列が得られる。

この方法を（1.10）の第Iブロックについて適用すると次の様になる。まず，第Iブロックに関する二値行列は，

$$B=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&1 \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

となる。ここで，各方程式に現われる頻度の最も多いのは，第3列に対応するGNPと，第5列に対応するPである。ここで，Pをスパイク変数とし，その他の変数について分割を試みると，不可能であることが分かる。一方，GNPをスパイク変数とした場合は，残りの7変数は3ブロックに分割される。実際，GNPを除いた二値行列は，

$$B=\begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&1&1 \end{pmatrix} \qquad (1.12)$$

であるが，$B^3=B^4$となる。

$$B^3=\begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0 \end{pmatrix} \qquad (1.13)$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\Bigg)$$

ここで，各列は，C, IP, L, P, W, YO, YP に対応する。すなわち，GNPをスパイク変数とすれば，$\{C\}$，$\{IP\}$，$\{L, P, W\}$，$\{YO\}$，$\{YP\}$が4つの異なるブロックを形成していることが分かる。1.13によれば，ブロック$\{L, P, W\}$は$\{C\}$，$\{YO\}$，$\{YP\}$に先行しているが，$\{IP\}$とは対等関係にある。次にブロック$\{L, P, W\}$について同様な手続を行なえば，表1.2で示される新たな関係が得られる。それによれば，スパイク列はWとGNPの2変数となることが分かる。

1－3　Hellerman・Rarickの方法

Hellerman・Rarick［1972］は，疎行列からなる大規模線型計画法を効率的に解くための方法として，分割ピボット法（partitioned pivot procedure），いわゆるP^4法と呼ばれる方法を提案した。まず，前節の（1.8）式と同じく，G個の内生変数とG本の方程式からなるモデルについて考える。さらに，（1.9）のStewardの二値行列Bと同じ行列を用いてモデルの構造を記述する。すなわち，行列Bの要素b_{ij}は，

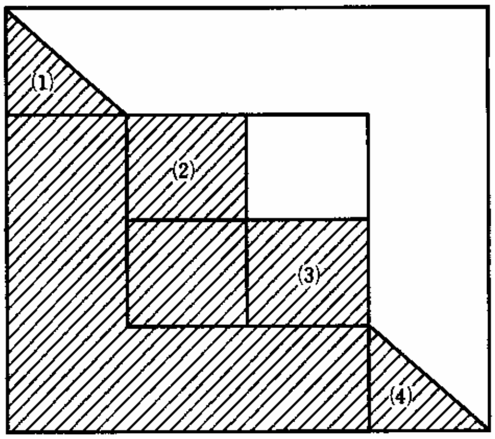
$$b_{ij}=\begin{cases} 1 \text{変数 } y_j \text{が方程式 } i \text{に含まれる} \\ 0 \text{その他} \end{cases}$$

である。Hellerman・Rarickの方法の第1段階は行列Bで表わされる構造をブロック分割することである(注)。図1.4は1つの例である。ブロック分割の最初の手続は，図1.4の（1），(4）で示されるようなブロックを見つけることである。この部分は，モデルの解法のなかでは逐次的に解くことができるブロックである。

まず，ブロック（4）を定める方法について述べる。図から明らかなように，再構成された構造においては，第G列に着目すると(G, G)要素だけが非ゼロで他は全てゼロとなっているはず

（注）　Hellerman・Rarickはそれをバンプ（bump）と呼んでいる。

図1.4　連立方程式体系のブロック分割



である。さらに，第$G-1$列については，第G行を除けば$(G-1, G-1)$要素だけが非ゼロで他は全てゼロとなっているはずである。したがって，ブロック（4）に含まれる変数を定めるためには，最初の行列Bについて非ゼロ要素がただ1つである列を探すことである。それが第i列であるとすれば，行列Bから第i行と第i列に対応する要素を除いて，新たに行列B^1を作成する。B^1は$(G-1)\times(G-1)$の行列である。次いでB^1について再び非ゼロ要素がただ1つである列を探して同様な手続でB^2を作成する。このような手順を繰り返すことによりブロック（4）を定める。この方法は後方三角化（backward trianglarization）と呼ばれる。一方，ブロック（1）を定めるためには，非ゼロの要素がただ1つとなる行を探す。列ではなく行に着目することを除けば，後方三角化と同じである。このようにブロック（1）を定める手順を前方三角化（forward trianglarization）と呼ぶ。

ブロック（1），(4）を定めることにより残された中間ブロックをXとし，Xを$n\times n$の行列とする。ここでまず，Xのブロック分割を行なう。この場合，Hellerman・Rarickの方法では先行－後続関係（predecessor-successor relationships）概念が重要な役割を果す。その概念に基づくいくつかの用語を定義する。

（1）　直接先行（immediately precede）

行列Xの(j, i)要素x_{ji}が非ゼロであれ

ば，変数 y_i は変数 y_j に直接先行すると言い，$i \lessdot j$ と記す。これは方程式 j で変数 y_i が説明変数として含まれる場合である。

（2）先行（precede）

$i \lessdot r_0 \lessdot r_1 \lessdot \cdots\cdots \lessdot r_m \lessdot j$ となる時，変数 y_i は変数 y_j に先行すると言い，$i<j$ と記す。これは変数 y_j が変数 $y_{\gamma o}$，$y_{\gamma 1}, \cdots$，$y_{\gamma m}$ を逐次媒介として変数 y_j に影響を及ぼすことを意味する。

（3）後続（succeed）

y_i が y_j に先行する場合，y_j は y_i に後続すると言う。

（4）同値（equivalent）

変数 y_i と y_j について，$i<j$ でかつ $j<i$ である場合，y_i と y_j は同値であると言い，i ⊜ j と記す。

次に中間ブロックXに含まれる変数 y_j に対して，以下の集合を定義する，

$E=\{i \in X | i$ ⊜ $j\}$

$P=\{i \in X | i<j$ でかつ i ⊜ j でない$\}$

$S=\{i \in X | j<i$ でかつ i ⊜ j でない$\}$

$R=\{i \in X | i \notin E$かつ,$i \notin P$ かつ $i \notin S\}$

ここで集合Eは変数 y_j と同値の関係にある変数群であり，Pは y_j に先行する変数群，Sは y_j に後続する変数群, Rはいずれにも属さない変数群である。集合E，P，S，Rは互いに共通部分を持たず, Xに含まれる全ての変数はいずれかの集合に属する。すなわち

$X=E \cup P \cup S \cup R$

となる。

Hellerman・Rarickのブロック分割では，中間ブロックをまず上記のような4つの集合に分割する。もし，Xがこれらの4つの集合に分割されるならば，P，R，E，SあるいはP，E，R，Sの順で方程式を並べかえるとモデルは一方向で解くことができる。なぜなら，P，E，R，Sは以下のような性質をもつからである。

1. Pに含まれる方程式は，E，Rに含まれる変数を使用していない。
2. E，Rに含まれる方程式は，Sに含まれる変数を使用していない。
3. Rに含まれる方程式は, Eに含まれる変数を使用していない。また, Eに含まれる方程式はRに含まれる変数を使用していない。

中間ブロックXをE，P，S，Rの4つの集合に分割するためにはまず適当な変数 y_j を指定して以下の手順を実行する。

1. Xの行に対応するような n 次元ベクトル P^* を用意し，すべての要素を0とおく。
2. Xの第j行の非ゼロ要素に対応する全ての番号 i に対して，$P^*(i)=1$ とする。さらに $P^*(j)=2$ とする（この結果 $P^*(i) \neq 0$ となる i に対応する変数 y_i は y_j に先行することになる）。
3. ベクトル P^* の要素のうち，$P^*(k)=1$ となる要素を探し，そのときの k を上記のjとみなして手順2をくり返す。（この手順で新たに $P^*(i)=1$ となった i に対応する変数 y_i は y_k に先行する。また，y_k は最初に選択された y_j に先行するから，y_i は y_j に先行することになる。従って，P^* の非ゼロ要素に対応する y は，最初に選択された変数 y_j に先行することになる。）
4. ベクトル P^* のなかで $P^*=1$となる要素がなくなったところで，手順を終了する。

上記のベクトル P^* のなかで $P^*(k)=2$となるすべての変数 y_k は最初に選択された変数 y_j に先行する変数群である。

次にベクトル P^* のかわりにベクトル S^* を用意し, Xの行のかわりに列について同様の手順を実行すると，$S^*(k)=2$となる全ての変数 y_k は y_j に後続する変数群となる。これらの変数群の集合を次のように記す。

$\tilde{p}=\{i \in X | i<j\}$

$\tilde{S}=\{i \in X | j<i\}$

XのE，P，S，Rの各集合への分割は，

$$\left.\begin{aligned} E&=\tilde{P} \cap \tilde{S} \\ P&=\tilde{P}-E \\ S&=\tilde{S}-E \\ R&=X-(\tilde{P} \cup \tilde{S}) \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

により行う。ここで集合Eはそれ以上の分割

は不可能な単独の1つのブロックを形成するが，P，S，Rの各集合は最初に選択されたy_jに依存するために，これら3つの集合については全く同じ方法を用いてブロックの再分割を続行することが必要である。ブロック分割は

$$\tilde{P}=\tilde{S}=X$$

となったところで終了する。なぜならXに含まれるすべての変数が同値関係にある場合にはブロックの再分割は不可能となるからである。

構造解析の第2段階は，分割されたブロックについて，フィルインを発生させるスパイク列をできるかぎり少なくするような方程式の再順序化を行なうことである。その結果として得られる構造は図1.2の第IIブロックで示されるヘリ付三角ブロックである。ここでHellerman・Rarickの方法を説明するために次の用語を定義する。

(5)　行計数（row count）

各行における非ゼロ要素の数である。すなわち，各方程式に現われる変数の数である。

(6)　列計数（column count）

各列における非ゼロ要素の数である。これは、各変数が何本の方程式に説明変数として登場するかを示したものである。

(7)　タリー関数（tally function）：$t_{(k}\ j)$

第j列に現われる非ゼロ要素に注目しそれらを含む各行の行計数をもとめる。そのとき，行計数がk以下になるような要素の個数を$t_{(k}\ j)$と書き，タリ一関数と呼ぶ。

次に，スパイク列を定める方法を以下に記す。

1. いま，スパイク列とすべき列がみつかったとして，その列をとり除くと，その列の非ゼロ要素を含む行の行計数は1だけ減る。

   そこで，行計数がkとなる行のグループについて，これらの行の要素を少なくとも1つ含むような列をさがし，それをスパイク列としてとり除くことを$k-1$回くり返すと，最後に行計数が1となるような行がいくつかできる。これらの行はとり除かれたスパイク変数のみで説明できるから，非スパイク変数とみなすことができる。
2. その際，できるだけ少ない個数のスパイク列をとり除くことによって，非スパイク変数をみつけることができるようにするため，最も小さい行計数kをもつ行のグループに対して上記操作を行うこととする。
3. また，このようにして最後に行計数が1となるような行の個数ができるだけ多くなるようにすれば一度に多くの変数を非スパイク変数として指定でき，効率的である。

   そこで，スパイク変数として取り除く列としては，それをとり除いた時にグループ内のできるだけ多くの行の行計数を減らすようなものから順に採っていくこととする。すなわち，各列iに対して，タリー関数$t_{(k}\ i)$を計算し，$t_{(k}\ i)$が最大となる列iをスパイク列として取り除くことをくり返す(注)。
4. 上記のようにして定められたスパイク変数に対して，再順序化行列における番号をうしろから順に与える。また，非スパイク変数も元の行列からとり除き，再順序化行列における番号を前から順に与える。
5. 上記の手順をくり返し，すべての変数に再順序化行列における番号が与えられたところで，その番号の順序に従って元の行列を並べかえれば，再順序化行列が得られる。

以下において，Hellerman・Rarickの方法を用いて，表1.1で示される簡単な日本経済のマクロモデルについて構造解析を行ってみる。

まず，後方三角化を行うために，構造行列Bのうち，非ゼロ要素がただ1つとなる列を探

（注）　$t_{(k}\ i)$が最大となる列が複数ある場合は，それらの列計数が最大となるものを採る。列系数を最大とする列が複数個ある場合は，はじめのものを採る。

すと，第4列の資本ストック K がその条件を満すことが分かる。次に，K を除いた行列 B^1 について同様な列を探す。しかし，このモデルではそのような列は存在しない。そのため，図1.4の（4）に相当するブロックの変数は K のみであることが分かる。

一方，前方三角化については，それを満たす変数は存在しないことが分かる。さらに，K を除いた8変数について先行－後続関係を調べると，8変数が1つの独立したブロックを形成していることが明らかとなる。すなわち，$\tilde{P}=\tilde{S}=X$となっている。

次に, 8変数からなるブロックについてフィルインを発生させるスパイク列の決定を行なう。8変数に関する構造は，表1.3に示されたとおりである。スパイク列を定めるための手順1～5は，8回の繰り返しで終了する。表1.4は，各繰り返しごとの行計数を示す。

表1. 3　8変数のブロック構造

方程式 ＼ 内生変数	C	IP	GNP	L	P	W	YO	YP
1	*				*			*
2		*	*					
3	*	*	*					
5			*	*	*	*		
6					*	*		
7			*	*	*	*		
8			*		*		*	
9				*		*	*	*

（注）　方程式番号4は資本ストックKに対応しているため除いてある。

表1. 4　反復回数ごとの行計数の推移

変数＼反復回数	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_1: C	3	3	3	2	2	2	2	1
Y_2: IP	2	1	*	*	*	*	*	*
Y_3: GNP	3	*	*	*	*	*	*	*
Y_5: L	4	3	3	2	2	*	*	*
Y_6: P	2	2	2	*	*	*	*	*
Y_7: W	4	3	3	2	2	1	*	*
Y_8: YO	3	2	2	1	*	*	*	*
Y_9: YP	4	4	4	4	3	2	1	*

（注）＊は，各反復回ごとに除かれる変数を意味する。

8回の繰り返しの過程を手順ごとに説明すると次の通りである。

1．最小の行計数が2であるから $k=2$ としてタリー関数 $t(_2\, i)$ を求めると次のように

なる。

$t_2(1)=0$，$t_2(2)=1$，$t_2(3)=1$
$t_2(5)=0$，$t_2(6)=1$，$t_2(7)=1$
$t_2(8)=0$，$t_2(9)=0$

最大値は1で，対応する変数は y_2，y_3，y_6，y_7 である。そこで各変数ごとの列計数を求める。

変　数	y_2	y_3	y_6	y_7
列計数	2	5	5	4

となり変数 y_3 と y_6 の列計数が同じであるため，はじめにあらわれた y_3：*GNP* を最初のスパイク変数として取り除き再順序化行列の最後（8番目）の変数とする。

2. 最小の行計数は1である。対応する変数 y_2：*IP* を最初の非スパイク変数として取り除く。
3. 最小の行計数が2であるから $k=2$ として，タリー関数を求めると次のようになる。

$t_2(1)=0$，$t_2(5)=0$，$t_2(6)=2$
$t_2(7)=1$，$t_2(8)=1$，$t_2(9)=0$

最大値は2で，対応する変数は y_6：*P* のみであり，それをスパイク変数として取り除き，再順序化行列の7番目の変数とする。

4. 最小の行計数は1である。対応する変数 y_8：*YO* を第2の非スパイク変数として取り除く。
5. 最小の行計数が2であるため $k=2$ として，タリー関数を求めると次のようになる。

$t_2(1)=1$，$t_2(5)=2$，$t_2(7)=2$
$t_2(9)=1$

最大値は2で対応する変数は y_5 と y_7 である。そこで両変数の列計数を求めると，

変　数	y_5	y_7
列計数	3	3

となり変数 y_5 と y_7 の列計数が同じとなるため，はじめにあらわれた変数 y_5：*L* をスパイク変数としてとり除き再順序化列の6番目の変数とする。

6. 最小の行計数は1である。対応する変数 y_7：*W* を第3の非スパイク変数としてとり除く。
7. 最小の行計数は1である。対応する変数 y_9：*YP* を第4の非スパイク変数としてとり除く。
8. 最後に残された変数は y_1：*C* でありこれを第5の非スパイク変数とする。

以上の反復過程から，スパイク変数として *GNP*，*P*，*L* の3個が選択される。また，非スパイク変数を順にならべると，*IP*，*YO*，*W*，*YP*，*C* となるが，この情報を用いて方程式の再順序化を行なうと表1.5のようになる。

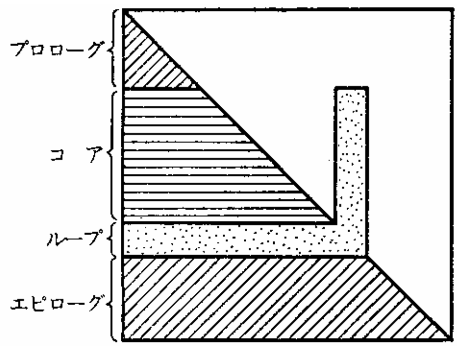
表1. 5　再順序化された構造

	IP	*YO*	*W*	*YP*	*C*	*L*	*P*	*GNP*
2	*							*
8		*					*	*
7			*			*	*	*
9		*	*	*		*		
1				*	*		*	
5			*			*	*	*
6			*				*	
3	*				*			*

1－4　Nepomiastchy・Ravelliの方法

Nepomiastchy・Ravelli［1978］の方法は，Hellerman・Rarickの方法と同じく，連立方程式体系に対して前方三角化および後方三角化の処理を行ない，残された中間ブロックについてフィルインの発生を引き起こすスパイク列をなるべく少なくして解法に必要な計算量を軽減することを目的としている。図1.5は，分割され

図1. 5　連立方程式体系のブロック分割



た連立方程式体系の構造と各ブロックの名称を示したものである。各ブロックの名称は異なっているが，基本的にHellerman・Rarick法による構造解析で得られる構造図と同一である。プロローグ（Prologue），コア（core），ループ（loop），エピローグ（epilogue）と名づけられた各ブロックは次の性質を持つ。

1. プロローグは他のブロックに先行して逐次的に解くことができる。
2. コアは，プロローグとループに含まれる変数の値が与えられれば逐次的に解くことができる。
3. ループは，プロローグに含まれる変数の値が与えられれば，コアと同時的に解くことができる。モデルの同時性はコア変数の存在により生じる。
4. エピローグは，他の3ブロックに含まれる変数の値が与えられれば逐次的に解くことができる。

これらの性質はHellerman・Rarick法による分割の場合についてもあてはまる。

以下において，Nepomiastchy・Ravelliの方法について，まず，プロローグとエピローグとを決定する手順から述べる。この手順は，Hellerman・Rarickの前方三角化及び後方三角化の場合と全く同じである。両者の違いは，Hellerman・Rarickが後方三角化を先に行なうのに対してNepomiastchy・Ravelliが前方三角化を先に行なう点である。いずれを先に行なうかによりプロローグとエピローグに含まれる変数リストに違いが生ずるが両者を非中間ブロックとすれば非中間ブロック全体に含まれる変数群は同じとなる。

次に中間ブロックXをコアとループの2つのブロックに分割することを考える。ここでも，Hellerman・Rarickの先行－後続関係が重要な役割を果す。ただしHellerman・Rarickの場合は中間ブロックX全体の変数に関するものであるが，Nepomiatschy・Ravelliの場合はXの特定の列の列番号jより小さな列および行番号をもつ要素からなる部分行列を対象とする概念であるというところに違いがある。

ここで前もって指定された変数y_jに対し，jより小さい番号をもつ行，列だけを対象として，先行子，後続子を以下のように定義する。

（1）　先行子（predeccessor）

$i < h_1 < h_2 < \cdots\cdots < h_p < j$とする時，行列$X$の要素 $x_{h_1 i}$，$x_{h_2 h_1}$，……，x_{jh_p}の全てが非ゼロである場合，変数y_iは変数y_jの先行子と言う。すなわち，ある変数y_iに対してjよりも小さい番号を持つ変数y_iが何らかの変数を媒体としてy_jに影響を与える場合である。

（2）　後続子（successor）

$i < j$でかつ$x_{ij} \neq 0$である場合，y_iをy_jの後続子と言う。すなわち，ある変数y_jに対してjより小さい番号を持つ変数y_iがy_jの被説明変数となる場合である。これはHellerman・Rarickの直接後続子に相当する。

ある変数y_jについて先行子の集合Pと後続子

の集合 S が定義されているとする。この時，$S \cap P \neq \phi$（空集合）であれば，y_j の先行子であると同時に後続子であるような変数 y_k が存在する。すなわち，j より小さい番号 k をもつ変数 y_k で，y_j から直接影響を受けると同時に何らかの変数を媒介として y_j に影響を与えるようなものが存在する。従って，j 以下の番号をもつ変数 y_1，y_2,……，y_k,……，y_j の中で y_k と y_j は一つのループを形成する。

一方 $S \cap P = \phi$ であれば y_j に影響する変数に対して y_j は直接的に影響しない。すなわち y_1，y_2,……，y_k,……y_j はコアを形成する。

このような性質を用いて，スパイク列に対応する変数がループ変数になるか否かを判定し，ループ変数を取り除いた残りのマトリクスを三角化するための手順を以下に記す。

1. 仮ループ変数 y_j を指定する。通常は最も左側にあるスパイク列に対応する y_j をとる。
2. 仮ループ変数 y_j の先行子集合 P と後続子集合 S をもとめる。
3. (i)　$S \cap P \neq \phi$ であれば y_j は真ループ変数であり，行列 X から j 行 j 列を除く。

   (ii)　$S \cap P = \phi$ であれば y_j は真ループ変数でない。そこで，変数を

   {P に含まれる変数，y_j，その他の変数}の順で並び替える。但し P に含まれる変数と残りの変数の順序は並び替える直前のものとする。

   これにより，次の仮ループ変数の直前の列までが三角化され，スパイク列が一つ減る。
4. 仮ループ変数がなくなれば終了。そうでなければ手順1へもどる。

Nepomiastchy・Ravelliの方法を用いて，表1.1で示される簡単な日本経済モデルの構造解析を行なう。

まず，プロローグ変数を探す。すなわち，非ゼロ要素がただ1つ存在する行を探す。このモデルの場合にはその条件を満たす行は存在しないので，プロローグ変数がないことがわかる。次にエピローグ変数を探す。すなわち，非ゼロ要素がただ1つ存在する行を探す。このモデルでは，y_4 に対応する資本ストック K が該当する。y_4 を除いた変数についてのブロック構造は，Hellerman・Rarick法で求めた表1.3と同じものである。この行列についてさらに，エピローグ変数を探してもこれ以上存在しないことがわかる。したがって中間ブロックとしてHellerman・Rarick法と同じものが得られる。プロローグおよびエピローグに対応する変数についても同じものが得られる。

次に，中間ブロックを以下のようにしてコアとループに分割する。

1. 表1.3により y_5: GNP を仮ループ変数とする。この場合，GNP の後続子集合 S は S={y_2: IP} となる。一方先行子集合 P は P={y_1: C，y_2: IP} となり，$S \cap P$={y_2:

表1.7　GNPを　除　い　た　構　造

	C	IP	L	P	W	YO	YP
1	*			*			*
2		*					
5			*	*	*		
6				*	*		
7			*	*	*		
8				*		*	
9			*		*	*	*

表1. 8　変数の並べ替えによる構造

	P	*C*	*IP*	*L*	*W*	*YO*	*YP*
6	*				*		
1	*	*					*
2			*				
5	*			*	*		
7	*			*	*		
8	*					*	
9				*	*	*	*

表1. 9　*W* を 除 い た 構 造

	P	*C*	*IP*	*L*	*YO*	*YP*
6	*					
1	*	*				*
2			*			
5	*			*		
8	*				*	
9				*	*	*

IP}は空集合でない。したがって*GNP*は真ループ変数となり，行列*X*から第3行と第3列に対応する要素を除く。表1.7は*GNP*を除いた構造を表わしている。

2.　表1.7の構造について，y_6: *P*を仮ループ変数とする。この場合，*P*の後続子集合*S*は*S*={y_1: C，y_5: *L*}となる。一方，先行子集合*P*は，*P*=φで空集合となり*S*∩*P*も空集合となる。したがって，y_6: *P*は真ループ変数とならない。そこで3.(ii)の規約により変数の並べ替えを行なった結果が表1.8である。

3.　表1.8の構造について，y_7: *W*を仮ループ変数とする。この場合，*W*の後続子集合*S*は*S*={y_5: *L*，y_6: *P*}である。一方，先行子集合*P*は*P*={y_5: *L*，y_6: *P*}となる。したがって*S*⋂*P*={y_5: *L*，y_6: *P*}は空集合でなく，y_7: *W*は真ループ変数となる。そこで*W*に対応する行と列の各要素を除いて新たな行列を作成したのが表1.9である。

4.　表1.9の構造について，y_9: *YP*を仮ループ変数とする。この場合，*YP*の後続子集合*S*は，*S*={y_1: *C*}となる。一方先行子集合*P*は，*P*={ y_5: *L*，y_6: *P*，y_8: *YO*} となる。したがって*S*∩*P*は空集合であり，y_9: *YP*は真ループ変数にならない。そこで3.(ii)の規約により変数の並べ替えを行なったのが表1.10である。

5.　表1.10にはこれ以上仮ループ変数とすべきものは存在しないため，以上で中間ブロックの分割を終了する。

Nepomiastchy・Ravelliの方法により，前方三角化・後方三角化・コアとループへのブロック分割を行なって得られた新たな構造が表1.11である。

表1. 10　変数の並び替えによる構造

	P	*L*	*YO*	*YP*	*C*	*IP*
6	＊					
5	＊	＊				
8	＊		＊			
9		＊	＊	＊		
1	＊			＊	＊	
2						＊

表1. 11　再順序化された構造

	P	*L*	*YO*	*YP*	*C*	*IP*	*GNP*	*W*	*K*
6	＊							＊	
5	＊	＊					＊	＊	
8	＊		＊				＊		
9		＊	＊	＊				＊	
1	＊			＊	＊				
2						＊	＊		
3					＊	＊	＊		
7	＊	＊					＊	＊	
4						＊			＊

1−5　構造解析

本節では，(1) Steward，(2) Hellerman・Rarickと (3) Nepomiastchy・Ravelliの3種類の構造解析手法について比較検討する。構造解析に用いるモデルは，経済企画庁経済研究所で世界経済モデル研究プロジェクトの一環として開発された西独と日本経済に関する計量経済モデルである[注1]。方程式の規模は西独モデルが84本，日本モデルが152本である。世界経済モデルの国別モデルにおいて，前者は中規模の部類に，後者は大規模の部類に属する。計算機は，経済企画庁の富士通FACOM M−200システムを用いて[注2]いる。

図1.6と1.10は，西独モデルと日本モデルのそれぞれについて，方程式と変数との関係を表わす構造の初期状態を示している。

ここで初期状態とは，各々のモデルの開発担当者が方程式ファイルへ登録し，ガウス・ザイデル法によりモデルを解く際に実際に用いられ

(注1)　本節で用いたモデルの方程式体系と変数名称は，Amano，A.，A. Maruyama and M. Yoshitomi eds［1982］を参照。

(注2)　プログラムはFORTRAN HEで組まれている。特に，連立方程式体系を表現する二値行列は，1バイト長の論理型配列を用い，演算は全て論理演算として処理している。