

**ESRI Discussion Paper Series No.203**

DYNARE による動学的確率的一般均衡シミュレーション  
~ 新ケインズ派マクロ経済モデルへの応用 ~

by

矢野浩一

December 2008



内閣府経済社会総合研究所  
Economic and Social Research Institute  
Cabinet Office  
Tokyo, Japan

ESRI ディスカッション・ペーパー・シリーズは、内閣府経済社会総合研究所の研究者および外部研究者によって行われた研究成果をとりまとめたものです。学界、研究機関等の関係する方々から幅広くコメントを頂き、今後の研究に役立てることを意図して発表しております。

論文は、すべて研究者個人の責任で執筆されており、内閣府経済社会総合研究所の見解を示すものではありません。

# DYNARE による動学的確率的一般均衡シミュレーション ～ 新ケインズ派マクロ経済モデルへの応用 ～\*

矢野浩一<sup>†</sup>

## < 要約 >

本論文は DYNARE を用いた動学的確率的一般均衡モデル (Dynamic Stochastic General Equilibrium Model) のシミュレーションを解説する。近年、Yun (1996)、Gali (2002) などの研究に基づくミクロ経済学的基礎を持つ新ケインズ派 (New Keynesian) マクロ経済モデル (New IS-LM) が金融政策の分析において注目を浴びている。また、New IS-LM を発展させた New Keynesian モデル (Hybrid New IS-LM) が Christiano et al. (2005) などによって提案されており、各国政府や中央銀行などで研究が進められている。本論文では DYNARE を用いて、New IS-LM ならびに Hybrid New IS-LM、Hybrid New IS-LM モデルに流動性制約下にある家計を導入したモデルのシミュレーションを解説する。また、DYNARE や New IS-LM に詳しくない読者のため、Appendix に簡潔な DYNARE 入門である Collard and Juillard (2001b) 全訳と New IS-LM の導出過程、Sims (2002) の解説を付する<sup>1</sup>。

JEL Classification Number: C15, E00, E50, E62, and D52

キーワード: Dynare, 動学的確率的一般均衡モデル, 新ケインズ派経済学, New IS-LM, 流動性制約下の家計

---

\*有用なコメントをいただいた飯田泰之、石原庸博、岩本光一郎、岡田靖、岡田多恵、加藤涼、片岡剛士、川崎泰史、Hyun Suk、佐藤綾野、田中賢治、寺井晃、西山慎一、広瀬哲樹、松前龍宜、吉野直行、Michel Juillard の各氏、2007 年度内閣府経済社会総合研究所小型動学マクロモデル研究会参加者、特に ESRI ワークショップのコメントーターとして多くの有益なコメントをくれた奴田原健悟氏に感謝します。また Collard and Juillard (2001b) 全訳を掲載することを許可してくれた Fabrice Collard と Michel Juillard に感謝します。本論文に関するご意見・ご質問は常時お受けしておりますが、DYNARE インストールに関するお問い合わせや大学での宿題等に関するご相談はお受けできないことをあらかじめお断りしておきます。本論文のプログラムと追加情報は以下のサポートページに掲載するので参照されたい。http://koitiyano.hp.infoseek.co.jp/dynare/ なお、本稿の内容は全て著者の個人的見解であり、内閣府及び内閣府経済社会総合研究所の公式見解ではない。

<sup>†</sup>内閣府経済社会総合研究所主任研究官

<sup>1</sup>本論文でのプログラムはすべて Dynare Version 4 を Matlab (R2007b) にインストールした環境で動くことを確認している。なお、Dynare version 4 の入手とインストールに関しては各自で以下を参照されたい。http://www.cepremap.cnrs.fr/dynare/

# **Dynare and Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: Application to New Keynesian Models**

By Koiti Yano<sup>†</sup>

## **Abstract**

This paper is an introduction to Dynare and New Keynesian, dynamic stochastic general equilibrium models. In recent years, micro-founded macroeconomic models is a hot topic in monetary policy analysis, for example, Yun (1996), Gali (2002). A simple new Keynesian model is often called new IS-LM. Christiano et al. (2005) propose a medium-scale DSGE model (hybrid new IS-LM), and the extensions of it is often used in governments and central banks. This paper shows simulating new IS-LM and hybrid new IS-LM using Dynare. Moreover, we show simulating hybrid new IS-LM with liquidity-constraint household to analyze fiscal policy.

JEL Classification Number: C15, E00, E50, E62, and D52

Key words : Dynare, Dynamic Stochastic General Equilibrium Model, New Keynesian, New IS-LM, Liquidity-constraint household

---

<sup>†</sup>Research Fellow, Economic and Social Research Institute, Cabinet Office, Government of Japan. This paper presents the author's personal views, which are not necessarily the official ones of the Economic and Social Research Institute or the Cabinet Office.

# 1 はじめに

近年、マクロ経済学において、ミクロ経済学的基礎を持った動学的確率的一般均衡モデル (Dynamic Stochastic General Equilibrium Model、以下 DSGE モデル) を用いた金融・財政政策の分析が盛んになりつつある。代表的なテキストとして加藤 (2006) や Walsh (2003)、Woodford (2003)、Gali (2008) など挙げられる (なお、この分野はすでに膨大な先行研究があるため、文献等に関してはこれらのテキストを参照されたい)<sup>3</sup>。DSGE モデルは期待項 (forward-looking 変数) を含んだ非線形モデルとして定式化されることが多く、従来はその合理的期待解を得るために研究者各人が自分のモデルに合致したプログラムを作成する必要があった。しかし、現在ではフランス CEPREMAP を中心としたチームにより DYNARE が開発され、各人がプログラミングで苦労するという問題はほぼ解消されたといえる<sup>4</sup>。DYNARE は DSGE モデルの合理的期待解を求め、インパルス応答関数を計算するなどの機能を装備した MATLAB もしくは GNU octave 上で動くプログラム群である<sup>5</sup>。DYNARE には以下のような機能が含まれている。

1. DSGE モデルの定常状態の計算
2. DSGE モデルの Stochastic な解を求める：1 次近似は Sims (2002)、2 次近似は摂動展開法 [Collard and Juillard (2001a), Schmitt-Grohe and Uribe (2004)] に基づく
3. パラメーターの構造推計：最尤法とマルコフ連鎖モンテカルロ法による
4. 最適金融政策の導出
5. Bayesian VAR : Del Negro et al. (2007)

これらの機能により研究者が独自にプログラミングする負担が軽減される。

Kimball (1995)、Roberts (1995)、Yun (1996)、King (2000)、Mccallum and Nelson (1999)、Clarida et al. (1999)、Gali (2002) などの先行研究を基盤として Calvo 型粘着価格モデルに基づく New Keynesian モデルが各国政府・中央銀行で政策分析に用いられることが多くなりつつある (各国政府・中央銀行での政策分析例については Fujiwara et al. (2005) や Erceg et al. (2006) などを参照のこと)。そのため、New Keynesian モデルを用いたシミュレーションに対する必要性が高まっているため、本論文ではそれらを DYNARE でシミュレーションする方法を解説する。基本となる New Keynesian モデルである New IS-LM は (1) IS 曲線、(2) フィリップ曲線、(3) 金融政策ルール (Taylor ルール) の 3 式からなる。この New IS-LM は「金融政策分析のコンセンサス」(McCallum (2001)) と呼ばれており、そういう意味からもこのモデルを中心に取り上げることは意義があると言える。この基本モデルは (1) GDP ギャップが期待 GDP ギャップのみに依存する [IS 曲線]、(2) インフレ率 (目標インフレ率からの乖離) が期待インフレ率に依存するという形で定式化されている。そのため、将来に対する期待 (GDP ギャップとインフレ率) が変化すると、それに合わせて現在の値がジャンプするという現象が見られる。しかし、実際のマクロデータで実証分析を行うと、GDP ギャップもインフレ率も過去に依存する部分が大きく、純粋なジャンプ変数とは言い難いことがすでに指摘されている (Fuhrer and Moore (1995)、Amisano and Tristani (2007) 等を参照のこと)。これらの課題を解決するために改良されたモデルが Christiano et al. (2005) や Smets and Wouters (2003) で提案された Hybrid New IS-LM (Medium-scale DSGE model) である。Hybrid New IS-LM が現実のマクロ経済データと整合性が

<sup>3</sup>加藤・平田 (2007) なども参照されたい。

<sup>4</sup>Juillard (1996) を参照のこと。DYNARE のユーザーマニュアルとしては Mancini Griffoli (2007) がある。また、DYNARE に関する入門テキストとして Barillas et al. (2007) と Liu (2006)、Arai (2008) も参照されたい。

<sup>5</sup>GNU octave については <http://www.octave.org/> を参照されたい。

高いことは Onatski and Williams (2004)、Levin et al. (2005)、Fout (2005)、Trabandt (2006)、Del Negro et al. (2007) などによって指摘されている。日本のマクロ経済データによるパラメーター推定は Iiboshi et al. (2005) と Sugo and Ueda (2008) で行われている。そのため、本論文では Hybrid New IS-LM を用いたシミュレーションも併せて解説する。

これらの New Keynesian モデルは基本的には Real Business Cycles モデルの特徴を受け継いでおり、リカード等価命題が成り立つため、これらを用いて財政政策の効果を論じることは今までほとんど行われてこなかった。しかし、Mankiw (2000)、Gali et al. (2004)、Coenen and Straub (2005)、Erceg et al. (2006) などの研究により流動性制約下の家計をモデルに含めることで財政政策の効果も合わせて論じることが近年の潮流になりつつある<sup>6</sup>。そのため、応用例として Hybrid New IS-LM モデルに流動性制約下にある家計を導入し、リカード中立命題が成り立たない（つまり財政政策が効果を持つ）場合のシミュレーションも合わせて示す。各モデルの特徴をまとめると以下の通りである。

#### 1. New IS-LM [ モデルの詳細と導出過程は Appendix を参照のこと ]

- ミクロ経済学的基礎付けを持つ動学モデル
- 名目価格の硬直性（Calvo 型粘着価格モデル）
- Taylor ルール
- 資本と投資なし
- 主として金融政策の分析に使用

#### 2. Hybrid New IS-LM (Medium-scale DSGE model) [ モデルの詳細は Christiano et al. (2005)、Smets and Wouters (2003) を参照されたい ]

- New IS-LM に以下の特徴を追加
- 効用関数に習慣形成
- 名目賃金の硬直性（Calvo 型粘着価格モデル）
- 改定されなかった場合の名目価格・名目賃金をインフレ連動
- 資本と投資
- 投資の調整コスト
- 金融政策の分析に限らず資本蓄積や投資、労働市場の分析も可能

#### 3. 流動性制約家計付き Hybrid New IS-LM

- Hybrid New IS-LM に以下の特徴を追加
- 流動性制約下の家計
- Hybrid New IS-LM の分析対象に加えて財政政策政策の分析が可能

本論文は以下のように構成されている。第2節では Gali (2002) などに代表される Calvo 型粘着価格モデルに基づく New Keynesian モデル (New IS-LM)、第3節では Christiano et al. (2005) で提唱された New Keynesian モデル (Hybrid New IS-LM モデル) に関するシミュレーション法について述べ、第4節では Hybrid New IS-LM に流動性制約下の家計を加えたモデルのシミュレーション例を示し、第5

<sup>6</sup>財政政策に効果を持たせる（つまりリカード命題が成り立たなくする）ために、各国政府・中央銀行が用いる DSGE モデルでは流動性制約下の家計を導入することは少なくない（Black et al. (1997)、Fujiwara et al. (2005)、Gali et al. (2007)、Ratto et al. (2008) などを参照のこと）。

節でまとめと今後の展望について述べる。また、Appendix に DYNARE や New IS-LM に詳しくない読者の便宜のため、Appendix に簡潔な DYNARE 入門である Collard and Juillard (2001b) 全訳と New IS-LM の導出過程、Sims (2002) の解説を付する。

## 2 New IS-LM

近年、New Keynesian モデルを用いた金融政策分析がしばしば用いられるようになってきている (McCallum (2001))。欧米の上級マクロ経済学テキスト (Walsh (2003) や Woodford (2003) など) でも New Keynesian モデルが中心に取り上げられている。それらのモデルは、基本的に代表的個人モデルと独占的競争下で中間財を生産する企業の価格改定の機会が確率的に制限されるというモデル (Calvo 型粘着価格モデル、Calvo (1983)) に基づいている。最もシンプルなモデルは以下の 3 式に集約される (導出過程は Appendix を参照のこと)。

1. New Keynesian IS 曲線
2. New Keynesian Phillips 曲線
3. 金融政策ルール (Taylor ルール)

まず第一の要素は New Keynesian IS 曲線：

$$\hat{Y}_t = E_t \hat{Y}_{t+1} - \sigma(\hat{R}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) + \epsilon_t^Y \quad (1)$$

ここで  $\hat{Y}_t$  は GDP ギャップ、 $\hat{R}_t$  は名目短期金利、 $\hat{\pi}_t$  はインフレ率を表す (ただし、ハット付き記号 (たとえば  $\hat{X}$ ) は変数  $X$  の定常状態からの乖離を表す。以下同じ)。また  $\sigma$  は定数、 $\epsilon_t^Y$  は平均ゼロ・標準偏差  $\sigma^Y$  の正規分布を表す誤差項 (以下、記号  $\epsilon_t^X$  はすべて正規分布による誤差項を意味する)。第二の要素は New Keynesian Phillips 曲線：

$$\hat{\pi}_t = \beta E_t \hat{\pi}_{t+1} + \kappa \hat{Y}_t + \epsilon_t^\pi \quad (2)$$

ここで  $\beta$  は割引因子、 $\kappa$  は定数である (以下、明らかに定数である場合は説明を省くことがある)。第三の要素は短期の名目金利をターゲットとする金融政策ルール (通常は Taylor ルール) が用いられることが多い。

$$\hat{R}_t = \phi_1(\hat{\pi}_t - \pi^*) + \phi_2 \hat{Y}_t + \epsilon_t^R \quad (3)$$

ここで  $\pi^*$  はインフレ目標値を表す。以上の 3 式からなる分析モデルは従来の IS-LM との類推から New IS-LM と呼ばれることが多い<sup>7</sup>。なお、金融政策ルールとして式 (3) の代わりに、吉野・義村 (1997)、Clarida et al. (2000) などの先行研究に基づき以下のような政策ルール (Henderson-McKibbin-Taylor ルール) を用いることも多い<sup>8</sup>。

$$\hat{R}_t = \rho_m \hat{R}_{t-1} + (1 - \rho_m) \{ \phi_1(\hat{\pi}_t - \pi^*) + \phi_2 \hat{Y}_t \} + \epsilon_t^R \quad (4)$$

新たに加わった  $\rho_m \hat{R}_{t-1}$  項は中央銀行が政策金利の変動を平滑化することを意味している。今回は式 (4) を政策ルールとして用いた。

<sup>7</sup>New IS-LM の導出は Appendix を参照されたい。

<sup>8</sup>式 (4) を Henderson-McKibbin-Taylor ルールと呼ぶべきという指摘は Warwick McKibbin による。

New IS-LM は GDP ギャップ、インフレ率、名目短期金利に関する 3 式という非常に簡単なモデルであるため、金融政策に関する議論の出発点としてしばしば用いられている。図 1 に 1 標準偏差分の利上げを行った場合のインパルス応答関数を示す。New IS-LM の問題点は図 1 に見られるように

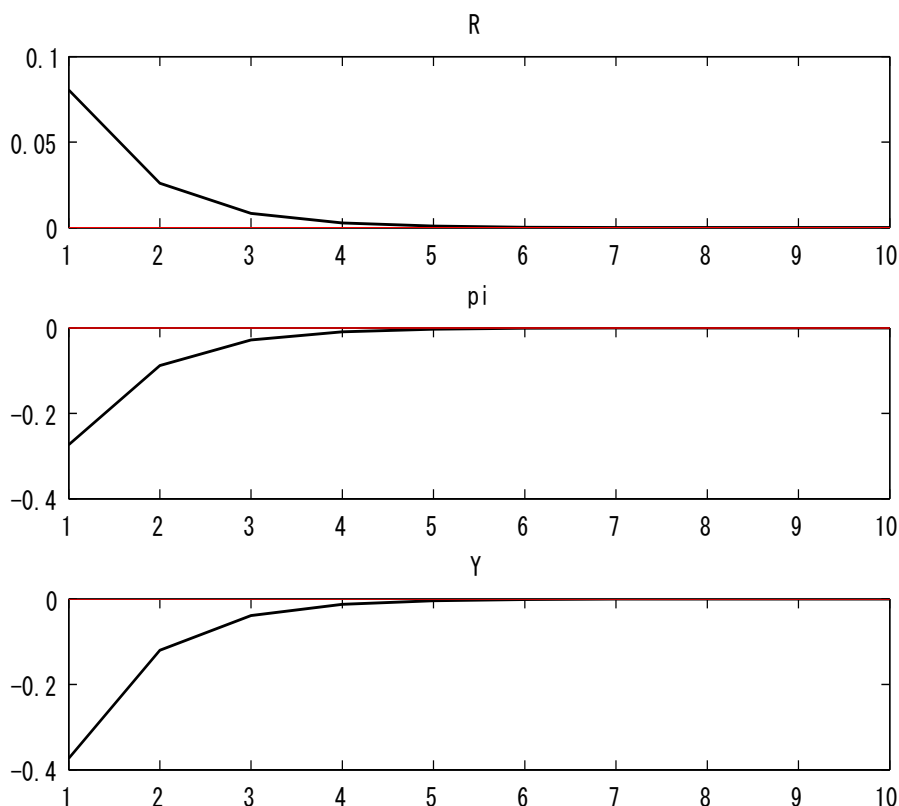


図 1: New IS-LM における金利ショック

利上げが即時的にインフレ率と GDP ギャップの下降を招いている点にある。しかし、現実の経済では利上げが GDP やインフレ率に即時的に影響を及ぼすとは考え難い。むしろ利上げの効果はある程度のラグを持って GDP やインフレ率に影響を及ぼすと考えられており、そのため実際のデータは緩やかな丘陵状になると考えられている。実際、New IS-LM は必ずしも実データとの整合性がよくないことが知られており、New IS-LM が普及し始めた時期から克服すべき課題とされていた（その点を克服するために提唱されたのが次節で解説する Christiano et al. (2005) のモデルである）。最後に本節でのシミュレーションに用いたコードを掲載する（パラメーターは加藤 (2006) を参考にした）。

```
// New IS-LM, Kato (2006), Walsh (2003), Woodford (2003),
// and Clarida, Gali, Gertler (2000)
// Copyright (c) 2007 Koiti Yano
```

```
//Endogenous variables
```

```
var pi Y R;
```



```

// Exogenous variables
varexo epi eY eR;

// Parameters
parameters beta kap mu sig rhom phil phi2 target sdpi sdY sdR;

beta=0.99;
kap=0.5;
sig=1.5;
rhom=0.8;
phil=1.5;
phi2=0.5;
target=0;
sdpi=0.2;
sdY=0.2;
sdR=0.2;

// Model
model(linear);
pi=beta*pi(+1)+kap*Y+epi; // New Keynesian Phillips Curve
Y=Y(+1)-sig*(R-pi(+1))+eY; // New Keynesian IS curve
//R=phil*pi+phi2*Y+eR; // Taylor rule (Simple)
R=rhom*R(-1)+(1-rhom)*(phil*(pi-target)+phi2*Y)+eR; // Tarlor rule
end;

// Initial conditions
initval;
Y = 0;
R = 0;
pi = 0;
end;

// Shocks
shocks;
var epi= sdpi^2;
var eY = sdY^2;
var eR = sdR^2;
end;

// Simulation
check;

```

stoch\_simul(irf=10) R pi Y;

### 3 Hybrid New IS-LM

本節では、Christiano et al. (2005) で提唱された Hybrid New IS-LM (Medium-scale DSGE model) のシミュレーションについて述べる。このモデルは前節の New IS-LM に (1) 代表的個人の効用関数に習慣形成の効果を含める、(2) 名目賃金の硬直性、(3) 改定されなかった場合の名目価格・名目賃金をインフレ連動、(4) 資本と投資、(4) 投資の調整コストなどの仮定を追加して、New IS-LM の問題点を解消することに成功している。Christiano et al. (2005) を対数線形化したモデル (Hybrid New IS-LM) は式 (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13) で表される (以下の式は Smets and Wouters (2003) と Onatski and Williams (2004) の定式化に基づくため、モデルの詳細についてはそれらの文献を参照されたい。パラメーターは Iiboshi et al. (2005) による 1970 年から 1998 年までの日本経済マクロデータによる推定結果に基づく。なお、読者の便宜を考え、元のモデルを少し簡略化してある)<sup>9</sup>。消費  $\hat{C}_t$  に習慣形成がある場合のオイラー方程式は以下の通りである。

$$\hat{C}_t = \frac{h}{1+h}\hat{C}_{t-1} + \frac{1}{1+h}E_t\hat{C}_{t+1} - \frac{1-h}{(1+h)\sigma_c}(\hat{R}_t - E_t\hat{\pi}_{t+1}) + \epsilon_t^C \quad (5)$$

ここで  $h$  は習慣形成の度合いを表し、 $\sigma_c$  は CRRA 型消費関数のパラメーターであり、 $\epsilon_t^C$  は需要ショックである。投資には調整コストを導入し、投資がトービンの  $\hat{Q}_t$  によって決まることとなる。投資  $\hat{I}_t$  とトービンの  $\hat{Q}_t$  に関する式は以下の通りである。

$$\hat{I}_t = \frac{1}{1+\beta}\hat{I}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta}E_t\hat{I}_{t+1} + \frac{\varphi}{1+\beta}\hat{Q}_t + \epsilon_t^I \quad (6)$$

ここで  $\beta$  は割引因子であり、 $\varphi$  は定数であり、 $\epsilon_t^I$  は投資ショックである。トービンの  $\hat{Q}_t$  は以下のように決まる。

$$\hat{Q}_t = -(\hat{R}_t - \hat{\pi}_{t+1}) + \frac{1-\tau}{1-\tau+\bar{r}^k}E_t\hat{Q}_{t+1} + \frac{\bar{r}^k}{1-\tau+\bar{r}^k}\hat{r}_{t+1}^K + \epsilon_t^Q \quad (7)$$

ここで  $\tau, \bar{r}^K$  は定数であり、 $\epsilon_t^Q$  はトービンの  $Q$  に対するショックである。資本  $\hat{K}_t$  の遷移式は以下の通りである。

$$\hat{K}_t = (1-\tau)\hat{K}_{t-1} + \tau\hat{I}_{t-1} \quad (8)$$

Christiano et al. (2005) は中間財市場で独占的競争企業が中間財を生産していると想定しており、その価格設定には Calvo 型粘着価格モデルを採用している。Calvo 型粘着価格モデルにおけるパラメーター  $\xi_p$  は  $t$  期において価格改定できない企業の割合を示し、 $1-\xi_p$  の企業が最適な価格を設定できると仮定して、New Keynesian Phillips 曲線を導出できる (Appendix 参照)。Christiano et al. (2005) はさらに  $t$  期に価格改定できなかった企業が製品価格を  $t-1$  期のインフレ率に連動させる (inflation indexation) という仮定を導入し、New Keynesian Phillips 曲線に過去のインフレ率に依存する項を追加した Hybrid New Keynesian Phillips 曲線を採用している。インフレ率  $\hat{\pi}_t$  に関する Hybrid New Keynesian Phillips 曲線は以下の通りである。

$$\hat{\pi}_t = \frac{\gamma_p}{1+\beta\gamma_p}\hat{\pi}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta\gamma_p}E_t\hat{\pi}_{t+1} + \frac{(1-\beta\xi_p)(1-\xi_p)}{(1+\beta\gamma_p)\xi_p}[\alpha\hat{r}_t^K + (1-\alpha)\hat{w}_t - \epsilon_t^a + \epsilon_t^\pi] \quad (9)$$

<sup>9</sup>Iiboshi et al. (2005) と Sugo and Ueda (2008) も参照されたい。

ここで  $\xi_p$  は価格改定に関する Calvo パラメーターであり、 $\gamma_p$  は定数であり、 $\epsilon_t^a$  は技術ショック、 $\epsilon_t^\pi$  はインフレーションショックである。Christiano et al. (2005) は Erceg et al. (2000) に従って家計  $j$  が差別化された労働  $L_{j,t}$  を独占的競争をしながら供給すると仮定する。家計  $j$  の賃金改定は Calvo 型粘着価格モデルによって定式化されており、さらに先述の inflation indexation を加えて、実質賃金についても Hybrid New Keynesian Phillips 曲線が導出される。実質賃金  $\hat{w}_t$  に関する Hybrid New Keynesian Phillips 曲線は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \hat{w}_t = & \frac{1}{1+\beta} \hat{w}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta} E_t \hat{w}_{t+1} + \frac{\gamma_w}{1+\beta} \hat{\pi}_{t-1} - \frac{1+\beta\gamma_w}{1+\beta} \hat{\pi}_t + \frac{\beta}{1+\beta} E_t \hat{\pi}_{t+1} \\ & - \frac{\lambda_w(1-\beta\xi_w)(1-\xi_w)}{(1+\beta)(\lambda_w+(1+\lambda_w)\sigma_L)\xi_w} [\hat{w}_t - \sigma_L \hat{L}_t - \frac{\sigma_c}{1-h} (\hat{C}_t - h\hat{C}_{t-1}) - \epsilon_t^w] \end{aligned} \quad (10)$$

ここで  $\xi_w$  は賃金改定に関する Calvo パラメーターであり、 $\gamma_w$  は定数であり、 $\epsilon_t^w$  は実質賃金ショックである。なお、Calvo パラメーター  $\xi_w$  は  $t$  期において価格改定できない家計の割合を示す。労働供給  $\hat{L}_t$  の関係式は以下の通りである。

$$\hat{L}_t = -\hat{w}_t + (1+\psi)\hat{r}_t^K + \hat{K}_{t-1} \quad (11)$$

ここで  $\psi$  は定数である。Market clearing は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \hat{Y} = & (1-\tau k_y - g_y)\hat{C}_t + \tau k_y \hat{I}_t + \bar{r}^k k_y \psi \hat{r}_t^K \\ \hat{Y} = & \phi_y \alpha \hat{K}_{t-1} + \phi_y \alpha \psi \hat{r}_t^K + \phi_y (1-\alpha) \hat{L}_t + \phi_y \epsilon_t^a \end{aligned} \quad (12)$$

ここで  $k_y, g_y, \alpha, \phi_y, \psi$  は定数である。Taylor ルールは以下の通りである。

$$\hat{R}_t = \rho_m \hat{R}_{t-1} + (1-\rho_m) \{ \phi_1 (\hat{\pi}_t - \pi^*) + \phi_2 \hat{Y} \} + \epsilon_t^R \quad (13)$$

ここで  $\epsilon_t^R$  は金利ショックである。

図2に1標準偏差分の利上げを行った場合のインパルス応答関数を示す。図1とは異なり、図2ではインフレ率、消費、投資、実質賃金が緩やかに低下した後、ゆっくりと定常状態に戻っていくという丘陵状のなだらかな形をしていることが分かる。このモデルは Del Negro et al. (2007) などの先行研究で実データと整合性が高いことが報告されている。図3にはインフレーションショックが起こった場合のインパルス応答を示す。図2と同様に丘陵状のなだらかな形をしていることが分かる。次に図4に技術ショックのインパルス応答を示す。正の技術ショックがあった場合、インフレ率が低下することが分かる。1990年代の日本経済の長期停滞に関して、「全要素生産性 (Total Factor Productivity)」の成長率低下を挙げる論調も少なくない (Hayashi and Prescott (2002) など) が、負の技術ショックが「全要素生産性 (Total Factor Productivity)」成長率低下に相当するため、図4の結果から TFP 成長率低下はインフレを引き起こす可能性が高いことが分かる (しかし、実際には日本経済は1990年代後半からデフレに陥っている)。そのため、TFP 成長率低下が長期停滞の原因だったとしても、その原因は直線的なものではなく、それ以外の要因も関係していたことを示唆しているのではないだろうか。

DYNARE の mod ファイルの書き方で初心者が間違いやすい部分について注記しておく<sup>10</sup>。

- $t$  期に決まる変数は  $X$  と書き、 $t+1$  期に決まる変数は  $x(+1)$ 、 $t-1$  期に決まる変数は  $X(-1)$  と

<sup>10</sup>このパラグラフの記述は奴田原健悟氏の示唆による部分が大きい

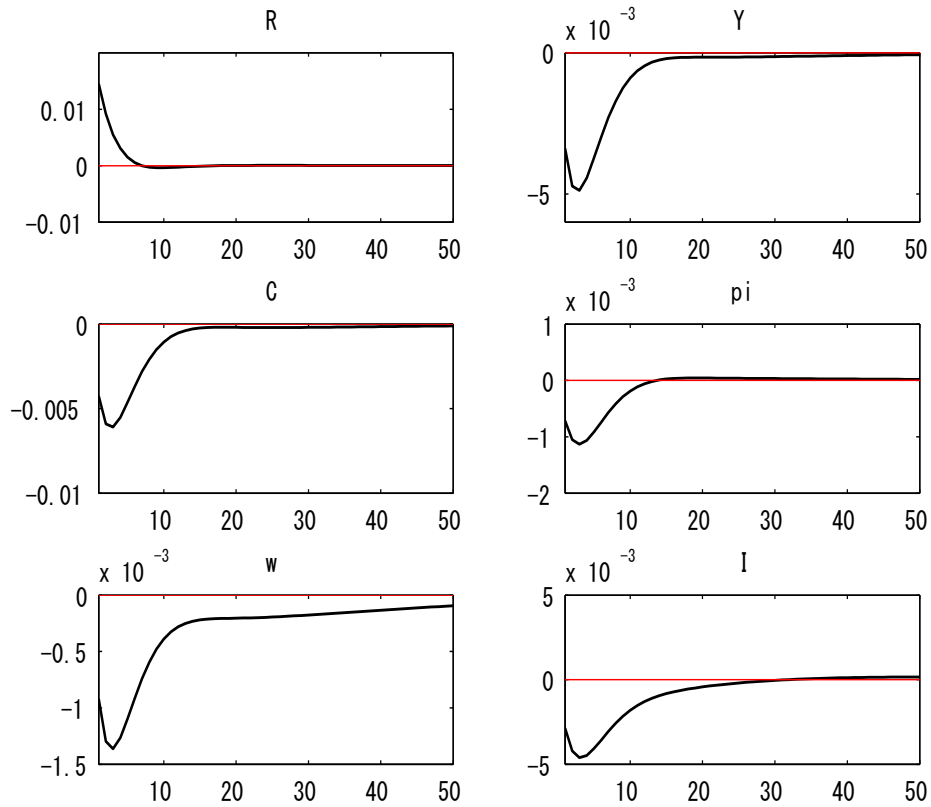


図 2: Hybrid New IS-LM における金利ショック

書く。ただし、DSGE の論文では資本は  $\hat{K}_{t+1}$  ( $t+1$  期の期初) と書くことが多いが、DYNARE のプログラミング上は  $\hat{K}_t$  ( $t$  期の期末) と考える

- DYNARE では外生ショックは iid (独立同分布) で定義する:

$$\hat{A}_t = \rho_A \hat{A}_{t-1} + \epsilon_t^A$$

DSGE に関する論文では今期の  $\hat{A}_t$  を外生状態変数 (外生ショック) とすることが多いが、DYNARE では  $\hat{A}_{t-1}$  が内生の状態変数、 $\epsilon_t^A$  を外生状態変数 (外生ショック) と考える

最後に本節でのシミュレーションに用いたコードを掲載する。

```
// Christiano, Eichenbaum, and Evans (2005), Smets and Wouters (2003),
// Clarida, Gali, Gertler (2000), and Iiboshi Nishiyama, and Watanabe (2005)
// Parameter estimates are described in Iiboshi Nishiyama, and Watanabe (2005).
// Copyright (c) 2007 Koiti Yano,

//Endogenous variables
var Y C I Q K pi w L rk R;

// Exogenous variables
varexo eC eI eQ epi ew ea eR;
```

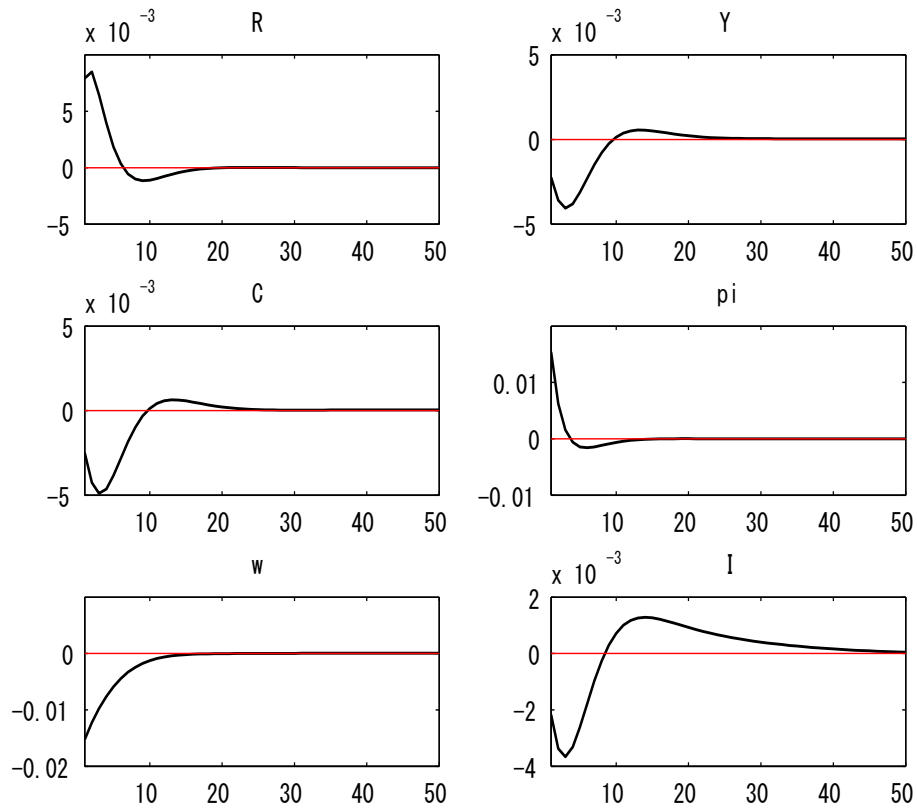


図 3: Hybrid New IS-LM におけるインフレーションショック

```
// Parameters
parameters beta h sigC psi tau rbarK gammaP xiP sigpi alpha gammaW lambdaW;
parameters xiW sigL sigW rhow phi ky gy phiy rhom phil phi2 target;
parameters sdC sdI sdQ sdpi sdw sda sdR;

beta = 0.99;
h = 0.79;
sigC = 1.92;
psi = 0.041;
tau = 0.025;
rbarK = 1/beta - 1 + tau;
gammaP = 0.579;
xiP = 0.791;
sigpi = ((1-beta*xiP)*(1-xiP))/((1+beta*gammaP)*xiP);
alpha = 0.3;
gammaW = 0.581;
lambdaW = 0.05;
```

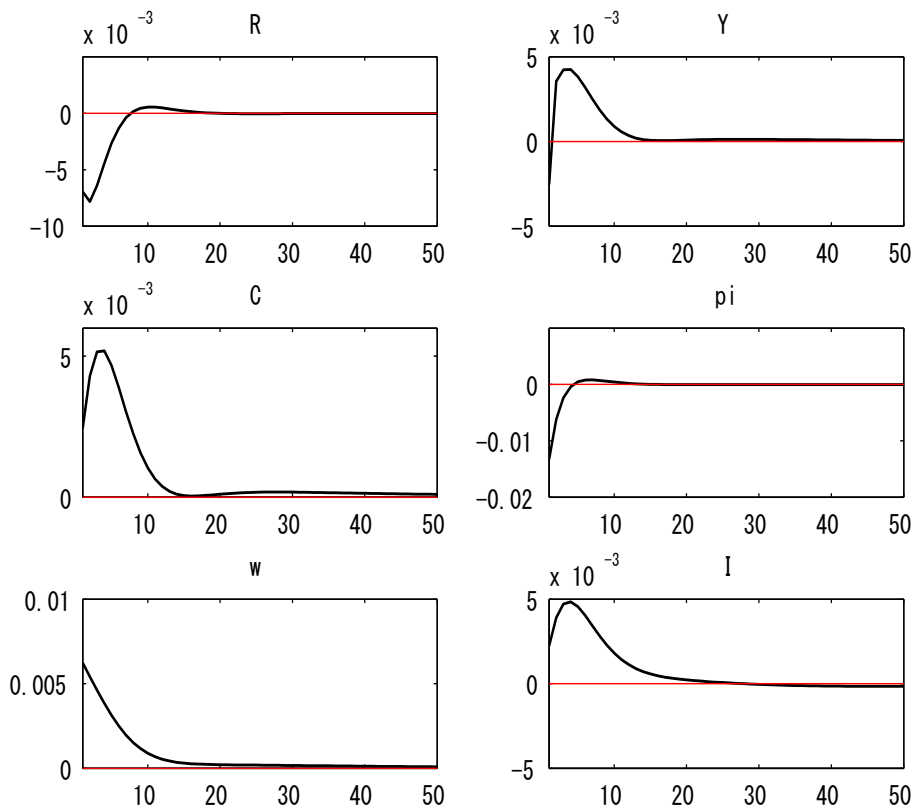


図 4: Hybrid New IS-LM における技術ショック

```

xiW = 0.275;
sigL = 2.077;
sigW = (lambdaW*(1-beta*gammaW)*(1-gammaW))/
  ((1+beta) * (lambdaW+(1+lambdaW)*sigL)*xiW);
phi = 0.288;
ky = 2.2;
gy = 0.2;
phiy = 1.588;
rhom = 0.68;
phil = 1.62;
phi2 = 0.097;
target = 0;
sdC = 0.125;
sdI = 0.045;
sdQ = 0.3;
sdpi = 0.33;
sdw = 0.25;
sda = 0.202;

```

```

sdR = 0.015;

// Model
model (linear);

C = (h/(1+h))*C(-1) + (1/(1+h))*C(+1) - (1-h)/((1+h)*sigC)*(R - pi(+1)) + eC;
I = (1/(1+beta))*I(-1) + (beta/(1+beta))*I(+1) + psi/(1+beta)*Q + eI;
Q = - (R - pi(+1)) + (1-tau)/(1-tau+rbarK)*Q(+1) + rbarK/(1-tau+rbarK)*rk + eQ;
K = (1- tau)*K(-1) + tau*I;
pi = gammaP/(1+beta*gammaP)*pi(-1) + beta/(1+beta*gammaP)*pi(+1)
    + sigpi*(alpha*rk + (1-alpha)*w - ea + epi) ;
w = (1/(1+beta))*w(-1) + (beta/(1+beta))*w(+1) + (gammaW/(1+beta))*pi(-1)
    - ((1+beta*gammaW)/(1+beta))*pi + (beta/(1+beta))*pi(+1)
    - sigW*(w - sigL*L - (sigC/(1-h))*(C-h*C(-1)) - ew) ;
L = -w + (1+phi)*rk + K(-1);
Y = (1-tau*ky-gy)*C + tau*ky*I + rbarK*ky*phi*rk;
Y = phiy*alpha*K(-1) + phiy*alpha*phi*rk + phiy*(1-alpha)*L + phiy*ea;
R = rhom*R(-1) + (1-rhom)*(phil*(pi-target) + phi2*Y) + eR;

end;

// Initial conditions
initval;
Y = 0;
C = 0;
I = 0;
Q = 0;
K = 0;
pi = 0;
w = 0;
L = 0;
rk = 0;
R= 0;
end;

// Shocks
shocks;
var eC = sdC^2;
var eI = sdI^2;
var eQ = sdQ^2;
var epi = sdpi^2;
var ew = sdw^2;

```

```

var ea = sda^2;
var eR = sdR^2;
end;

// Simulation
check;
stoch_simul(irf=50, LINEAR) R Y C pi w I;

```

## 4 流動性制約下の家計を伴う Hybrid New IS-LM

本節では Erceg et al. (2006)、Coenen and Straub (2005) に倣い、前節で述べたモデルに流動性制約下の家計を導入する。流動性制約下の家計は消費の異時点間最適化を行えないため、可処分所得をすべて消費に費やしてしまうと仮定する。手を動かして働いた収入をすべて口に運んで食べてしまうというイメージから Hand-to-Mouth 家計（以下 HM 家計）と呼ぶことにする<sup>11</sup>。HM 家計は消費の異時点間最適化を行わないため、リカードの等価命題が成り立たない。つまり、一時的な所得移転を得るとそれをすべて消費に回してしまうため、HM 家計に関しては財政政策が効果を持つことになる。

最初に式 (12) を以下のように変更する。

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= \lambda_o(1 - \tau k_y - g_y)\hat{C}_t + \tau k_y \hat{I}_t + \bar{r}^k k_y \psi \hat{r}_t^K + (1 - \lambda_o)(1 - \tau k_y - g_y)\hat{C}_t^{hm} + g_y \hat{G}_t \\ \hat{Y} &= \phi_y \alpha \hat{K}_{t-1} + \phi_y \alpha \psi \hat{r}_t^K + \phi_y (1 - \alpha) \hat{L}_t + \epsilon_t^a\end{aligned}\quad (12')$$

ここで  $\hat{C}_t^{hm}$  は HM 家計の消費、 $\hat{G}_t$  は政府支出、 $\lambda_o$  は消費の異時点間最適化を行う家計の比率を表している（シミュレーションでは畑農 (2004) などの先行研究を参考に、 $\lambda_o = 0.6$ （つまり 60% が異時点最適化を行う家計、40% が HM 家計）とした）。さらに HM 家計は以下の式に従って消費を決定すると仮定する。

$$C_t^{hm} = w_t L_t + TR_t \quad (14)$$

ここで  $TR_t$  は  $t$  期における所得移転を示す。また、モデルを簡単にするため HM 家計の賃金と労働供給は最適化を行う家計に完全に連動すると仮定する。式 (15) を対数線形化すると以下の式となる。

$$\hat{C}_t^{hm} = \rho_{hm}(\hat{w}_t + \hat{L}_t) + \sigma_{hm} \hat{TR}_t \quad (15)$$

ここで  $\rho_{hm} = \bar{w} \bar{L} / \bar{C}^{hm}$  と  $\sigma_{hm} = \bar{TR} / \bar{C}^{hm}$  は定数である。なお、簡単化のために本論文での政府は民間から税の徴収は行わず、国債の償還・発行の範囲内だけで政府支出と所得移転を決定するものとする。その場合、政府予算制約式は以下の形で定式化される。

$$G_t + TR_t + \frac{(1 + R_{t-1})B_{t-1}}{P_t} = \frac{B_t}{P_t} \quad (16)$$

ここで  $G_t$  は政府支出、 $B_t$  は国債発行量、 $P_t$  は物価水準である。対数線形化すると以下の式を得る。

$$\hat{G}_t + \rho_{TR} \hat{TR}_t + \rho_b(\hat{R}_t + \hat{b}_{t-1} - \pi_t) = \sigma_b \hat{b}_t \quad (17)$$

<sup>11</sup>Rule of Thumb 家計と呼ばれることも多い。Gali et al. (2004), Mankiw (2000), Gali et al. (2007) なども参照のこと。



ここで  $b_t = B_t/P_t$  と記号を置き換えてある。また、 $\rho_{TR} = \bar{T}R/\bar{G}$ ,  $\rho_b = (1 + \bar{R})\bar{b}/(\bar{\pi}\bar{G})$ ,  $\sigma_b = \bar{b}/\bar{G}$  は定数である。また  $\hat{G}_t$  と  $\hat{T}R_t$  は以下の確率的プロセスに従うと仮定する。

$$\hat{G}_t = \alpha_G \hat{G}_{t-1} + \epsilon_t^G \quad (18)$$

$$\hat{T}R_t = \alpha_{TR} \hat{T}R_{t-1} + \epsilon_t^{TR} \quad (19)$$

まとめると式 (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12'), (13), (15), (17), (18), (19) が本節のモデルである。次に所得移転ショック  $\hat{T}R_t$  を表すインパルス応答関数を図 5 に示す。図から分かるように所得移転により異時点最適化を行う家計の消費  $\hat{C}_t$  は程度低下しているが、HM 家計の消費  $\hat{C}_t^{hm}$  は上昇しており、全体の  $\hat{Y}_t$  が上昇している。そのため、所得移転がある程度の景気浮揚効果を持つことが分かる。最後にシミュレーションに用いたコードを掲載する。

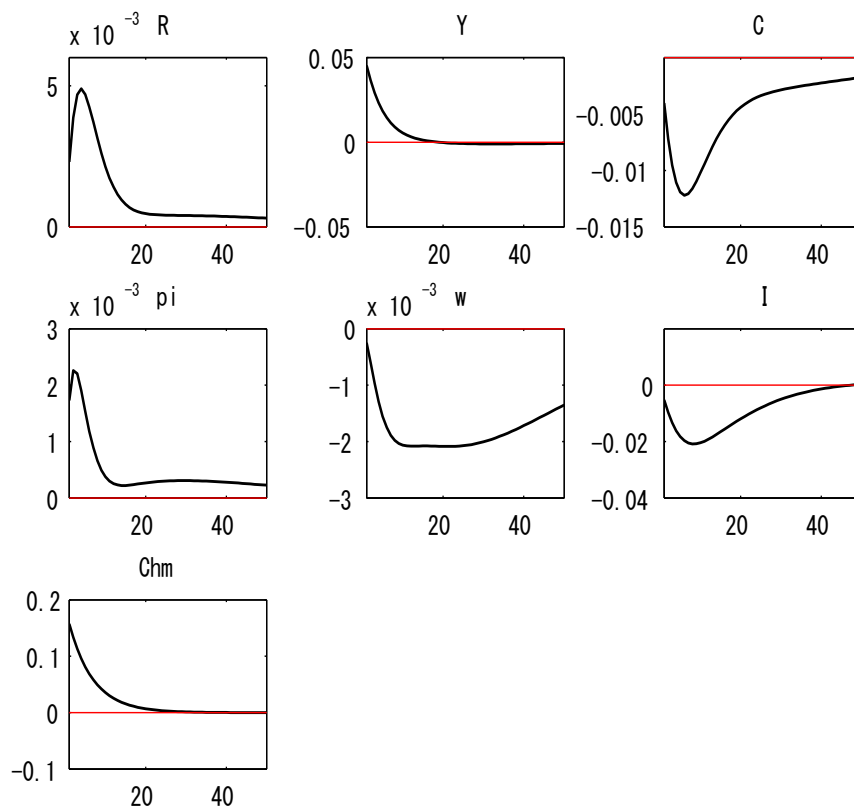


図 5: HM 家計あり Hybrid New IS-LM における所得移転

```
// Christiano, Eichenbaum, and Evans (2005), Smets and Wouters (2002),
// Clarida, Gali, Gertler (2000), Iiboshi Nishiyama, and Watanabe (2005),
// and Erceg (2006)[SIGMA]
// Parameter estimates are described in Iiboshi Nishiyama, and Watanabe (2005).
// Copyright (c) 2007 Koiti Yano,
```

```

//Endogenous variables
var Y C I Q K pi w L rk R b G TR Chm;

// Exogenous variables
varexo eC eI eQ epi ew ea eR eG eTR;

// Paramaters
parameters beta h sigC psi tau rbarK gammaP xiP sigpi alpha gammaW lambdaW;
parameters xiW sigL sigW rhow phi ky gy phiy rhom phil phi2 target;
parameters lambdao rhoTR rhob sigb rhohm sighm alphaG alphaTR;
parameters sdC sdI sdQ sdpi sdw sda sdR sdG sdTR;

beta = 0.99;
h = 0.79;
sigC = 1.92;
psi = 0.041;
tau = 0.025;
rbarK = 1/beta - 1 + tau;
gammaP = 0.579;
xiP = 0.791;
sigpi = ((1-beta*xiP)*(1-xiP))/((1+beta*gammaP)*xiP);
alpha = 0.3;
gammaW = 0.581;
lambdaW = 0.05;
xiW = 0.275;
sigL = 2.077;
sigW = (lambdaW*(1-beta*gammaW)*(1-gammaW))/
  ((1+beta)*(lambdaW+(1+lambdaW)*sigL)*xiW);
phi = 0.288;
ky = 2.2;
gy = 0.2;
phiy = 1.588;
rhom = 0.68;
phil = 1.62;
phi2 = 0.097;
target = 0;
lambdao = 0.6;
rhoTR = 0.2;
rhob = 0.1;
sigb = 0.1;
rhohm = 0.2;

```

```

sighm = 0.3;
alphaG = 0.1;
alphaTR = 0.85;
sdC = 0.125;
sdI = 0.045;
sdQ = 0.3;
sdpi = 0.33;
sdw = 0.25;
sda = 0.202;
sdR = 0.015;
sdG = 0.01;
sdTR = 0.5;

// Model
model (linear);

C = (h/(1+h))*C(-1) + (1/(1+h))*C(+1) - (1-h)/((1+h)*sigC)*(R - pi(+1)) + eC;
I = (1/(1+beta))*I(-1) + (beta/(1+beta))*I(+1) + psi/(1+beta)*Q + eI;
Q = - (R - pi(+1)) + (1-tau)/(1-tau+rbarK)*Q(+1) + rbarK/(1-tau+rbarK)*rk + eQ;
K = (1- tau)*K(-1) + tau*I;
pi = gammaP/(1+beta*gammaP)*pi(-1) + beta/(1+beta*gammaP)*pi(+1)
    + sigpi*(alpha*rk + (1-alpha)*w -ea + epi);
w = (1/(1+beta))*w(-1) + (beta/(1+beta))*w(+1) + (gammaW/(1+beta))*pi(-1)
    - ((1+beta*gammaW)/(1+beta))*pi + (beta/(1+beta))*pi(+1)
    - sigW*(w - sigL*L - (sigC/(1-h))*(C-h*C(-1)) - ew) ;
L = -w + (1+phi)*rk + K(-1);
Y = lambdao*(1-tau*ky-gy)*C + tau*ky*I + rbarK*ky*phi*rk
    + (1-lambdao)*(1-tau*ky-gy)*Chm + gy*G;
Y = phiy*alpha*K(-1) + phiy*alpha*phi*rk + phiy*(1-alpha)*L + phiy*ea;
G+rhoTR*TR+rhob*(R + b(-1) - pi)=sigb*b;
Chm = rhohm*(w + L)+ sighm*TR;
G = alphaG*G(-1) + eG;
TR = alphaTR*TR(-1) + eTR;
R = rhom*R(-1) + (1-rhom)*(phil*(pi-target) + phi2*Y ) + eR;

end;

// Initial conditions
initval;
Y = 0;
C = 0;
I = 0;

```

```

Q = 0;
K = 0;
pi = 0;
w = 0;
L = 0;
rk = 0;
R = 0;
b = 0;
G = 0;
TR = 0;
Chm = 0;
end;

// Shocks
shocks;
var eC = sdC^2;
var eI = sdI^2;
var eQ = sdQ^2;
var epi = sdpi^2;
var ew = sdw^2;
var ea = sda^2;
var eR = sdR^2;
var eG = sdG^2;
var eTR = sdTR^2;
end;

// Simulation
check;
stoch_simul(irf=50, LINEAR) R Y C pi w I G Chm;

```

## 5 まとめ

本論文では DYNARE を用いた動学的確率的一般均衡モデルのシミュレーションを紹介した。はじめに Gali (2002) などに代表される New Keynesian モデル (New IS-LM) によるシミュレーションを解説し、続いて Christiano et al. (2005), Smets and Wouters (2003) で提唱された New Keynesian モデル (Hybrid New IS-LM) と Hybrid New IS-LM モデルに流動性制約下にある家計を導入したモデルのシミュレーションを解説した。

今後の課題としてはゼロ金利政策ならびに量的緩和政策を分析するため金利の非負制約 (ゼロ金利制約) を考慮したモデルの構築が必要である<sup>12</sup>。また今回のモデルは小規模なものに留まっているが、今後はより大規模な DSGE モデルを実現していく予定である。さらに、近年 DYNARE の機

<sup>12</sup>Yano (2008) では Kitagawa (1996) と Gordon et al. (1993) で提案されたモンテカルロフィルタ (粒子フィルタ) ならびに Kitagawa (1998) で提案された自己組織化状態空間モデルを用いて金利の非負制約 (ゼロ金利制約) 下の DSGE モデルを 1980 年から 2007 年の日本マクロ経済データ (四半期ベース) を用いて推定している。

能であるマルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte Carlo) による DSGE パラメータ推定も盛んに行われるようになってきている<sup>13</sup>。今後はそれらの重要手法に対してさらに理解を深めるとともに筆者が提唱するモンテカルロフィルター (粒子フィルター) と自己組織化状態空間モデルを組み合わせて DSGE を推定する手法 (Yano (2008)) も同時に推進して行く予定である<sup>14</sup>。

## 付録 A プログラムファイル名

本論文で使用したプログラムは以下のサイトで配布する。

<http://koitiyano.hp.infoseek.co.jp/dynare/>

各モデルに対応するファイル名は以下の通り。

1. New IS-LM モデル: newislm.mod
2. Hybrid New IS-LM モデル: smets.mod
3. Hand-to-Mouth モデル: h2m.mod
4. Collard and Juillard (2001b) の例: example1.mod (DYNARE に付属で配布されているもの)

## 付録 B Collard and Juillard (2001b) 全訳

本節では Real Business Cycles モデル (以下、RBC) を題材として DYNARE を解説する<sup>15</sup>。RBC では無限期間の経済を考え、そこに多数で同質の家計と多数で同質の企業が完全競争市場下で活動していると想定する。企業は資本と労働を用いて同質な最終財を生産する。最終財は消費することも投資に使うこともできると仮定する。企業は資本を保有し、家計が提供する労働を雇用して生産を行う。この企業は家計に保有されていると想定する。各期には、消費財市場、労働市場、資本財市場の 3 つの完全競争市場が開催されると考える。家計の選好は以下の式で定式化される。

$$E_t \sum_{\tau=t}^{\infty} \beta^{*\tau-t} \left( \log(c_t) - \theta \frac{h_t^{1+\psi}}{1+\psi} \right) \quad (\text{B1})$$

ここで  $0 < \beta^* < 1$  は割引因子、 $c_t$  は  $t$  期の消費、 $h_t$  は  $t$  期の労働、 $\theta > 0$  と  $\psi \geq 0$  は定数である。さらに以下の制約条件の下で、経済全体を統制する中央計画者が存在し、家計の効用関数を最大化させるように消費、労働、資本蓄積を決定する。

$$c_t + i_t = y_t \quad (\text{B2})$$

ここで  $i_t$  は投資、 $y_t$  は産出である。投資は物的資本として以下の式で蓄積される。

$$k_{t+1} = \exp(b_t)i_t + (1 - \delta)k_t \text{ with } 0 < \delta < 1 \quad (\text{B3})$$

<sup>13</sup>MCMC を用いた DSGE モデルのパラメータ推定全般については Schorfheide (2000), Smets and Wouters (2003), Onatski and Williams (2004), Levin et al. (2005), An and Schorfheide (2007), Hirose and Naganuma (2007), 日本経済への MCMC 推定の適用については Iiboshi et al. (2005), Sugo and Ueda (2008)、DYNARE での具体的な推定のやり方については Mancini Griffoli (2007) を参照されたい。

<sup>14</sup>モンテカルロフィルター (粒子フィルター) を用いたパラメータ推定については Fernandez-Villaverde and Rubio-Ramirez (2005), Fernandez-Villaverde and Rubio-Ramirez (2007) などを参照されたい。

<sup>15</sup>本節は Collard and Juillard (2001b) を翻訳したものである。翻訳には慎重を期したが、より正確な情報が必要な場合には原文に当たられたい。また、全訳を本論文に掲載する許可をくれた Fabrice Collard と Michel Juillard に感謝する。

$\delta$  は資本減耗率であり、 $b_t$  は投資を資本に変換する効率性を示すショックである ( $b_t$  については後述)。

産出は資本と労働を用いて決定される。本節では Cobb–Douglas 型生産関数を用いる<sup>16</sup>。

$$y_t = \exp(a_t)k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} \text{ with } 0 < \alpha < 1 \quad (\text{B4})$$

ここで  $a_t$  は技術に対するショック (もしくは Solow 残差) を表す。先述したショック  $a_t$  と  $b_t$  は、それぞれ平均はゼロであるが、 $t$  期において相関するような関係にあると想定する。ショック  $a_t$  と  $b_t$  のプロセスは以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \tau \\ \tau & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \nu_t \end{pmatrix} \quad (\text{B5})$$

ここで定常性を満たすため  $|\rho + \tau| < 1$  と  $|\rho - \tau| < 1$  である必要がある。さらに以下の条件が必要である。

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0, \\ E(\nu_t) &= 0, \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s) &= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{if } t = s \\ 0 & \text{if } t \neq s \end{cases}, \\ E(\nu_t \nu_s) &= \begin{cases} \sigma_\nu^2 & \text{if } t = s \\ 0 & \text{if } t \neq s \end{cases}, \\ E(\varepsilon_t \nu_s) &= \begin{cases} \varphi \sigma_\varepsilon \sigma_\nu & \text{if } t = s \\ 0 & \text{if } t \neq s \end{cases}. \end{aligned}$$

これまでの設定において問題の最適性を満たす 1 階の条件は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} c_t \theta h_t^{1+\psi} &= (1 - \alpha) y_t \\ \beta E_t \left[ \left( \frac{\exp(b_t) c_t}{\exp(b_{t+1}) c_{t+1}} \right) \left( \exp(b_{t+1}) \alpha \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right] &= 1 \\ y_t &= \exp(a_t) k_t^\alpha h_t^{1-\alpha} \\ k_{t+1} &= \exp(b_t) (y_t - c_t) + (1 - \delta) k_t \\ a_t &= \rho a_{t-1} + \tau b_{t-1} + \varepsilon_t \\ b_t &= \tau a_{t-1} + \rho b_{t-1} + \nu_t \end{aligned}$$

以上で RBC に関する説明は終了し、続いて DYNARE のコードの書式について述べる。

基本的には DYNARE のコードは (1) 内生変数や外生変数、パラメーターについて設定する preamble、(2) モデルについて設定する model、(3) モデルを解き、シミュレーション (インパルス応答分析) を行う設定から構成される。以下、それぞれのステップについて一つずつ記述していく<sup>17</sup>。

<sup>16</sup>Cobb–Douglas 型生産関数は規模に対して収穫一定という性質を満たす。

<sup>17</sup>コード全体は本節の最後にまとめて掲載する。

**Preamble** の記述 `preamble` では、モデルをシミュレートする期間や内生変数・外生変数を設定し、パラメーターの指定とそれに特定の値を付与するなどの記述を行う。

1. `periods 20100`; この部分はモデルの変数のモーメントを 20100 期以上に渡ってシミュレートすることを指定している
2. `var y, c, k, h, a, b`; モデルの内生変数を指定する。本節のモデルの場合、産出 ( $y$ )、消費 ( $c$ )、資本 ( $k$ )、労働 ( $h$ )、および二つのショック ( $a, b$ ) である
3. `varexo e, u`; モデルの外生変数を指定する。本節のモデルの場合、 $a_t$  に対するショック ( $e$ ) と  $b_t$  に対するショック ( $u$ ) である
4. `parameters`; モデルのパラメーターを記述する。本節のモデルでは以下ようになる。  
`parameters beta, alpha, delta, theta, psi, rho, tau`  
それぞれのパラメーターの意味は以下の通りである。

<code>beta</code>	割引因子
<code>alpha</code>	資本分配率
<code>delta</code>	減耗率
<code>theta</code>	労働不効用のパラメーター
<code>psi</code>	労働供給弾力性
<code>rho</code>	persistence
<code>tau</code>	cross-persistence

5. パラメーターに値を付与する。MATLAB での値の付与と同じく以下のように記述する

```
alpha = 0.36;  
rho    = 0.95;  
tau    = 0.025;  
beta   = 0.99;  
delta  = 0.025;  
psi    = 0;  
theta  = 2.95;
```

6.  $\varphi$  はショックの条件付相関であり、厳密に言えば `parameters` に記載する必要はない。しかし、 $\varphi$  をパラメーターとして記述しておくくと便利であると考えられるため、以下のように記述する。

```
phi = 0.1;
```

**モデルの記述** 次にモデルについて記述する。モデル (本節の場合、1 階の条件) は `model`; という文字と `end`; という文字の間に記述する。ただし、その際に気をつけるべきルールがいくつかある。それについて変数  $x$  を例に述べる。

- $x$  が  $t$  期における変数である場合、単に  $x$  と記述する
- $x$  が  $t-1$  期における変数である場合、 $x(-1)$  と記述する (本節のモデルでは資本  $k_{t-1}$  の場合)
- $x$  が  $t+1$  期における変数である場合、 $x(+1)$  と記述する (本節のモデルでは消費  $c_{t+1}$  の場合)

以上のルールに留意しながら、本節でのモデルを記述すると以下の通りである。

```
model;
c*theta*h^(1+psi)=(1-alpha)*y;
k = beta*(((exp(b)*c)/(exp(b(+1))*c(+1)))*
  (exp(b(+1))*alpha*y(+1)+(1-delta)*k));
y = exp(a)*(k(-1)^alpha)*(h^(1-alpha));
k = exp(b)*(y-c)+(1-delta)*k(-1);
a = rho*a(-1)+tau*b(-1) + e;
b = tau*a(-1)+rho*b(-1) + u;
end;
```

もし、レベルではなく対数で Taylor 展開を行う必要がある場合はモデルを以下のように書き直す必要がある。

```
model;
exp(c)*theta*exp(h)^(1+psi)=(1-alpha)*exp(y);
exp(k) = beta*(((exp(b)*exp(c))/(exp(b(+1))*exp(c(+1)))*
  *(exp(b(+1))*alpha*exp(y(+1))+(1-delta)*exp(k)));
exp(y) = exp(a)*(exp(k(-1))^alpha)*(exp(h)^(1-alpha));
exp(k) = exp(b)*(exp(y)-exp(c))+(1-delta)*exp(k(-1));
a = rho*a(-1)+tau*b(-1) + e;
b = tau*a(-1)+rho*b(-1) + u;
end;
```

この場合、消費のレベルは  $\exp(c)$  で与えられる。

モデルを解く 次にモデルの合理的期待解を計算し、インパルス応答関数を算出するための設定を行う。

1. はじめに均衡を計算するための初期条件を数値的に与える。初期条件は文字列 `initval;` と `end;` の間に記述する。初期値を設定すべきなのは内生変数、外生変数である。さらに本節のモデルではショックがない場合の非確率的均衡を計算するためにショック  $e$  と  $u$  にも初期値を設定する。

```
initval;
y = 1.08068253095672;
c = 0.80359242014163;
h = 0.29175631001732;
k = 11.08360443260358;
a = 0;
b = 0;
e = 0;
u = 0;
end;
```



2. 次にイノベーション項 (e と u) を特定するために分散共分散行列を設定する。この設定は Sigma\_e コマンドで行うことができる。

```
Sigma_e = [ 0.000081, (phi*0.009*0.009); ...  
           0.000081];
```

ここでイノベーションの分散は両方とも 0.000081 に設定されている。Sigma\_e でのショックは varexo で記述された順番で並べる必要がある。なお、要素が記号である場合 (ここでは phi) その記号はそれより前に特定の値を与えておく必要がある。

Sigma\_e を使わない方法としては shocks; と end; を使う方法がある。

```
shocks;  
var e = 0.009^2;  
var u = 0.009^2;  
var e,u = phi*0.009*0.009;  
end;
```

3. stoch\_simul; コマンドを書くことで、モデルが解かれ、シミュレーションが行われる。デフォルトでは近似された decision rules の係数とシミュレートした変数のモーメントが表示され、外生ショックに対するインパルス応答関数がプロットされる。さらに以下のオプションを使うことができる。

- DR\_ALGO = [0,1]: Decision rules の 2 次近似を行うアルゴリズムを設定する<sup>18</sup>。[0] (デフォルト) の場合は Schmitt-Grohe and Uribe (2004) のアルゴリズムを使用し、[1] の場合は Collard and Juillard (2001a) のアルゴリズムを使用する
- AR = 整数: 自己相関係数の次数の指定 (デフォルトでは=5)
- NOCORR 相関行列を印刷しない (デフォルトでは印刷する)
- DROP = 整数: シミュレーションした変数の記述統計を計算する際に最初のいくつまでを捨てるか指定 (デフォルトでは=100)
- IRF = 整数: インパルス応答関数の計算期間を設定する (デフォルトでは=40)
- NOFUNCTIONS 近似された解の係数をプリントしない
- LINEAR オリジナルのモデルが線形であることを示す
- NOMOMENTS 内生変数のモーメントをプリントしない
- ORDER = [1,2] Taylor 近似の次数 (デフォルトでは=2)
- REPLIC = 整数: IRF (インパルス応答関数) を計算する際に使用するシミュレーションされた時系列の数を設定する (ORDER=1 の場合は REPLIC=1、それ以外では REPLIC=50)

シミュレートされた結果は変数名 (var や varexo で使用した名前) の MATLAB のベクトルとして出力される (そのため MATLAB の予約語を変数名で使用しないように注意)。分散共分散行列を指定する時には政策関数が 2 次近似できるようなものを指定するように注意すること。さらに DYNARE はモーメントの計算をする時にはショックは正規分布に従うと仮定している。

本節のモデルでは単純に以下のように書けばよい。

<sup>18</sup>このオプションは DYNARE version 4 では無効になっている (Michel Juillard の指摘による)。

```
stoch_simul;
```

Collard and Juillard (2001a) のアルゴリズムを使い、初期値を 200 捨てる場合には以下のように書けばよい。

```
simul_stoch(dr_algo=1,drop=200);
```

### レベルで表記した場合の DYNARE のプログラム例

ここまで述べたレベルでモデルを表記した場合の DYNARE のコードをまとめる。

```
periods 20100;
```

```
var y, c, k, a, h, b;
```

```
varexo e,u;
```

```
parameters beta, rho, beta, alpha, delta, theta, psi, tau;
```

```
alpha = 0.36;
```

```
rho   = 0.95;
```

```
tau   = 0.025;
```

```
beta  = 0.99;
```

```
delta = 0.025;
```

```
psi   = 0;
```

```
theta = 2.95;
```

```
phi   = 0.1;
```

```
model;
```

```
c*theta*h^(1+psi)=(1-alpha)*y;
```

```
k = beta*((exp(b)*c)/(exp(b+1)*c(+1)))  
    *(exp(b+1)*alpha*y(+1)+(1-delta)*k);
```

```
y = exp(a)*(k(-1)^alpha)*(h^(1-alpha));
```

```
k = exp(b)*(y-c)+(1-delta)*k(-1);
```

```
a = rho*a(-1)+tau*b(-1) + e;
```

```
b = tau*a(-1)+rho*b(-1) + u;
```

```
end;
```

```
initval;
```

```
y = 1.08068253095672;
```

```
c = 0.80359242014163;
```

```
h = 0.29175631001732;
```

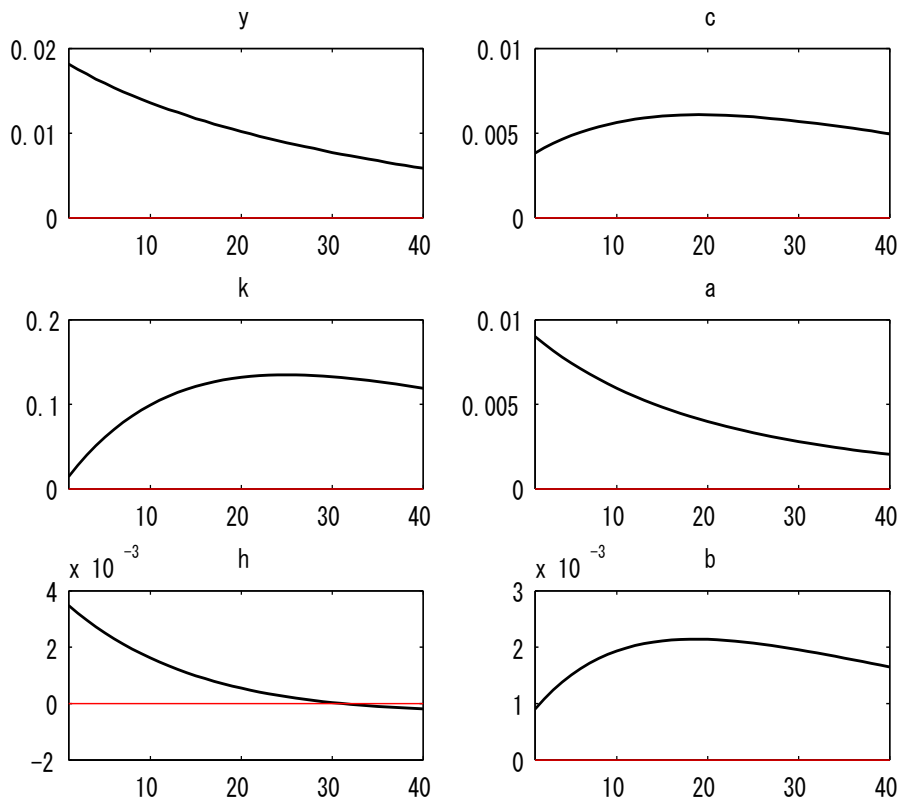
```
k = 11.08360443260358;
```

```
a = 0;
```

```
b = 0;
```

```
e = 0;  
u = 0;  
end;
```

```
Sigma_e = [ 0.000081, phi*0.009*0.009; 0.000081 ];  
stoch_simul;
```



☒ 6: RBC: Shock to e

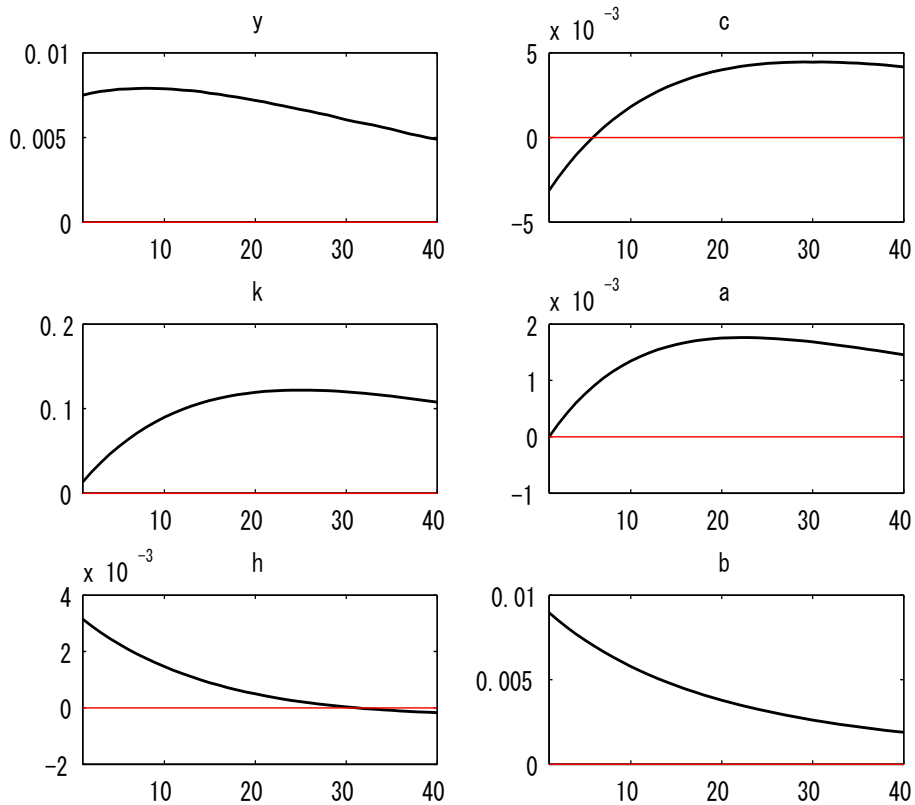


図 7: RBC: Shock to u

対数で表記した場合の DYNARE のプログラム例

対数でモデルを表した場合のプログラム例を示す。この場合、`initval` はある程度適切に推測した値を入れておけばよい。また、`steady` は非確率的な均衡の値を計算し、結果を表示することを指定している。また、二つのショックは相互に無相関であるとしている。

```

periods 20100;

var y, c, k, a, h, b;
varexo e,u;

parameters beta, rho, beta, alpha, delta, theta, psi, tau;

alpha = 0.36;
rho   = 0.95;
tau   = 0.025;
beta  = 0.99;
delta = 0.025;
psi   = 0;

```

```

theta = 2.95;

model;
exp(c)*theta*exp(h)^(1+psi)=(1-alpha)*exp(y);
exp(k) = beta*(((exp(b)*exp(c))/(exp(b(+1))*exp(c(+1))))
              *(exp(b(+1))*alpha*exp(y(+1))+(1-delta)*exp(k)));
exp(y) = exp(a)*(exp(k(-1))^alpha)*(exp(h)^(1-alpha));
exp(k) = exp(b)*(exp(y)-exp(c))+(1-delta)*exp(k(-1));
a = rho*a(-1)+tau*b(-1) + e;
b = tau*a(-1)+rho*b(-1) + u;
end;

initval;
y = 0.1;
c = -0.2;
h = -1.2;
k = 2.4;
a = 0;
b = 0;
e = 0;
u = 0;
end;

steady;

shocks;
var e = 0.009^2;
var u = 0.009^2;
end;

stoch_simul(dr_algo=1,drop=200);

```

## 付録 C New IS-LM の導出

本節では New Keynesian(ニューケインジアン) による金融政策分析モデルを取り上げる<sup>19</sup>。このモデルは現代マクロ経済学における金融政策の分析の基礎となるモデルであり、現在、金融政策に関するほとんどの分析がこのモデルを出発点としている。

このモデルでは家計は労働を供給し、消費のために財を購入し、貨幣と債券を保有する。企業は労働者を雇用し、それぞれ特有の財を生産し、独占的競争市場でそれを売却する。企業は財の価格を設定することが出来るが、すべての企業が各期毎に価格を再設定するできるとは限らない。家計と企業ともに最適行動を取る（家計は期待効用を最大化し、企業は利益を最大化する）。中央銀行は名目利子を制御するが、最適化行動は取らないものとする。

<sup>19</sup>本節の記述は Walsh (2003) の第 5 章 4 節に基づき、原文よりさらに詳細に計算過程を示したものである。

家計の効用は以下の式で表される。

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left[ \frac{C_{t+i}^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{\gamma}{1-b} \left( \frac{M_{t+i}}{P_{t+i}} \right)^{1-b} - \chi \frac{N_{t+i}^{1+\eta}}{1+\eta} \right] \quad (C6)$$

ただし、ここで  $C_t$  は構成消費財（後述）、 $M_t/P_t$  は実質貨幣残高、 $N_t$  は労働を表す。構成消費財は異なる最終財から構成される。その最終財は独占的競争市場で売却される。企業は連続で1に正規化され、企業  $j$  は財  $c_j$  を製造する。構成消費財は以下のような形で定義される。

$$C_t = \left[ \int_0^1 c_{j,t}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \quad \theta > 1. \quad (C7)$$

ここで  $\theta$  は各財に対する需要の価格弾力性を表している。

家計の意思決定は二段階に分けて行われる。(1) 最初に  $C_t$  のレベルを考慮せずに構成財を購入する費用を最小にすることを考える。(2) 次に  $C_t$ 、 $N_t$ 、 $M_t$  に関する最適化を考える。

ステップ (1)：最初に  $C_t$  を購入する費用を最小化することを考える。

$$\min_{c_{j,t}} \int_0^1 p_{j,t} c_{j,t} dj \quad (C8)$$

制約条件を以下に示す。

$$\left[ \int_0^1 c_{j,t}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \geq C_t \quad (C9)$$

ここで  $p_{j,t}$  は財  $j$  の価格を表す。ラグランジュ乗数を  $\psi_t$  とし Lagrangian を以下に示す。

$$\mathcal{L} = \int_0^1 p_{j,t} c_{j,t} dj + \psi_t \left[ C_t - \left[ \int_0^1 c_{j,t}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \right] \quad (C10)$$

$c_{j,t}$  に関する1階の条件を計算する [ここでは  $C_t$  は単なる上限としてしか作用しないことに注意]。

$$\begin{aligned} c_{j,t} : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{j,t}} &= 0 = p_{j,t} - \psi_t \frac{\partial}{\partial c_{j,t}} \left[ \int_0^1 c_{j,t}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \\ &= p_{j,t} - \psi_t \frac{\theta-1}{\theta} c_{j,t}^{\frac{\theta-1}{\theta}-1} \frac{\theta}{\theta-1} \left[ \int_0^1 c_{j,t}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}-1} \\ &= p_{j,t} - \psi_t c_{j,t}^{-\frac{1}{\theta}} \left[ \int_0^1 c_{j,t}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{1}{\theta-1}} \\ c_{j,t}^{\frac{1}{\theta}} &= \frac{\psi_t}{p_{j,t}} \left[ \int_0^1 c_{j,t}^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{1}{\theta-1}} \\ c_{j,t} &= \left( \frac{p_{j,t}}{\psi_t} \right)^{-\theta} C_t \end{aligned} \quad (C11)$$

構成財の定義と上の結果を利用して計算する。

$$\begin{aligned}
C_t &= \left[ \int_0^1 \left[ \left( \frac{p_{j,t}}{\psi_t} \right)^{-\theta} C_t \right]^{\frac{\theta-1}{\theta}} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \\
C_t &= \left( \frac{1}{\psi_t} \right)^{-\theta} \left[ \int_0^1 p_{j,t}^{1-\theta} dj \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} C_t \\
\psi_t &= \left[ \int_0^1 p_{j,t}^{1-\theta} dj \right]^{\frac{1}{1-\theta}} \equiv P_t
\end{aligned} \tag{C12}$$

Lagrange 乗数  $\psi_t$  は物価水準  $P_t$  を表す。結局  $P_t$  を用いて財  $j$  に対する需要  $c_{j,t}$  は以下のように表されることが分かった。

$$c_{j,t} = \left( \frac{p_{j,t}}{P_t} \right)^{-\theta} C_t \tag{C13}$$

財  $j$  に対する需要の価格弾力性は  $\theta$  に等しい。 $\theta \rightarrow \infty$  とした時、この財は代替が容易になり、それぞれの企業は市場支配力を失ってしまう（つまり独占的競争から完全競争に移行する）。

ステップ (2) :  $P_t$  の定義を前提として、家計の制約条件は以下のように表される。

$$C_t + \frac{M_t}{P_t} + \frac{B_t}{P_t} = \left( \frac{W_t}{P_t} \right) N_t + \frac{M_{t-1}}{P_t} + (1 + i_{t-1}) \left( \frac{B_{t-1}}{P_t} \right) + \Pi_t \tag{C14}$$

ここで  $M_t$  は貨幣保有量、 $B_t$  は1期だけの債券、 $W_t$  は賃金率、 $i_t$  は名目利子率、 $\Pi_t$  は企業から得られる実質利益である。1階の条件は以下の通りである。

$$C_t^{-\sigma} = \beta(1 + i_t) E_t \left( \frac{P_t}{P_{t+1}} \right) C_{t+1}^{-\sigma} \tag{C15}$$

$$\frac{\gamma \left( \frac{M_t}{P_t} \right)^{-b}}{C_t^{-\sigma}} = \frac{i_t}{1 + i_t} \tag{C16}$$

$$\frac{\chi N_t^\eta}{C_t^{-\sigma}} = \frac{W_t}{P_t} \tag{C17}$$

企業は以下に示す3つの制約条件の下で利益を最大化する。以下、制約条件を列挙する。(1) 第一の制約条件は利用可能な技術を集約して生産可能な量を関数として表す生産関数である。簡単化のためにここでは資本を無視して産出  $c_{jt}$  を以下の形で表す<sup>20</sup>。

$$c_{jt} = Z_t N_{jt}, \quad E[Z_t] = 1, \tag{C18}$$

ただし、 $Z_t$  は集約された生産性を表す確率変数、 $N_{jt}$  は労働投入量である。ここでは規模に対して収穫一定を仮定している。(2) 第二の制約条件は企業が直面する需要曲線である。この条件は式 (C13) で示されている。(3) 第三の制約条件は粘着価格を仮定することである。つまり、少なくとも企業の一部は価格調整がある期間に行えないと仮定する。ここでは Calvo (1983) の粘着価格モデルを使用する。

企業の価格決定について分析する前に費用を最小化する問題を考察しておく。これは  $c_{jt} = Z_t N_{jt}$

<sup>20</sup>短期の景気変動において資本を無視してよい理由は McCallum and Nelson (1999) を参照のこと。

という制約条件の下で  $W_t N_{jt}$  を最小化する問題として表される。

$$\min_{N_t} \left( \frac{W_t}{P_t} N_{j,t} \right) + \phi_t (c_{jt} - Z_t N_{jt}) \quad (C19)$$

1 階の条件は以下のとおり。

$$\phi_t = \frac{W_t/P_t}{Z_t} \quad (C20)$$

ここで  $\phi_t$  は企業の実質限界費用である。

企業の価格決定は以下の関数を最大化するものとする。

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \left[ \left( \frac{p_{jt}}{P_{t+i}} \right) c_{jt+i} - \phi_{t+i} c_{jt+i} \right] \quad (C21)$$

ここで  $\omega$  は価格改定が行えない企業の比率（外生パラメーター）であり、確率的割引因子  $\Delta_{i,t+i}$  は  $\beta^i (C_{t+i}/C_t)^{-\sigma}$  で与えられる。式 (C13) を用いて  $c_{jt}$  を削除する。

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \left[ \left( \frac{p_{jt}}{P_{t+i}} \right)^{1-\theta} - \phi_{t+i} \left( \frac{p_{jt}}{P_{t+i}} \right)^{-\theta} \right] C_{t+i} \quad (C22)$$

それぞれの企業は違った製品を作っているが、企業はどれも同じ製造技術を有し、一定で等しい需要弾力性を持つ需要曲線に対応しなければならない。言い換えると、それぞれの企業は本質的に同一だが、Calvo (1983) モデルの仮定により現在の価格はそれぞれに企業で異なる可能性がある（過去もしくは現在に決定した価格を使っている）。しかし、価格調整の機会を与えられた企業は同じ価格を設定する。

1 階の条件を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_{j,t}} E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \left[ \left( \frac{p_{j,t}}{P_{t+i}} \right)^{1-\theta} - \phi_{t+i} \left( \frac{p_{j,t}}{P_{t+i}} \right)^{-\theta} \right] C_{t+i} &= 0 \\ E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \left[ (1-\theta) \left( \frac{p_{j,t}}{P_{t+i}} \right)^{-\theta} \frac{1}{P_{t+i}} + \phi_{t+i} \theta \left( \frac{p_{j,t}}{P_{t+i}} \right)^{-\theta-1} \frac{1}{P_{t+i}} \right] C_{t+i} &= 0 \\ E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \left[ (1-\theta) \frac{1}{P_{t+i}} + \phi_{t+i} \theta \left( \frac{p_{j,t}}{P_{t+i}} \right)^{-1} \frac{1}{P_{t+i}} \right] \left( \frac{p_{j,t}}{P_{t+i}} \right)^{-\theta} C_{t+i} &= 0 \\ E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \left[ (1-\theta) \left( \frac{p_{j,t}}{P_{t+i}} \right) + \theta \phi_{t+i} \right] \left( \frac{1}{p_{j,t}} \right) \left( \frac{p_{j,t}}{P_{t+i}} \right)^{-\theta} C_{t+i} &= 0 \end{aligned} \quad (C23)$$

よって  $p_t$  の最適値  $p_t^*$  は

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \left[ (1-\theta) \left( \frac{p_t^*}{P_{t+i}} \right) + \theta \phi_{t+i} \right] \left( \frac{1}{p_t^*} \right) \left( \frac{p_t^*}{P_{t+i}} \right)^{-\theta} C_{t+i} = 0 \quad (C24)$$

$$\begin{aligned} E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} (\theta-1) \frac{1}{P_{t+i}} (p_t^*)^{-\theta} P_{t+i}^{\theta} C_{t+i} &= E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \theta \phi_{t+i} \frac{1}{p_t^*} (p_t^*)^{-\theta} P_{t+i}^{\theta} C_{t+i} \\ \frac{p_t^*}{P_t} E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} (\theta-1) P_{t+i}^{\theta-1} P_t^{1-\theta} P_t^{\theta} C_{t+i} &= E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \theta \phi_{t+i} P_{t+i}^{\theta} C_{t+i} \end{aligned} \quad (C25)$$



ここで  $\Delta_{i,t+i}$  は  $\beta^i (C_{t+i}/C_t)^{-\sigma}$  で与えられることを利用して式を整理する。

$$\begin{aligned}\frac{p_t^*}{P_t} &= \left(\frac{\theta}{\theta-1}\right) \frac{E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \phi_{t+i} \left(\frac{P_{t+i}}{P_t}\right)^\theta C_{t+i}}{E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \Delta_{i,t+i} \left(\frac{P_{t+i}}{P_t}\right)^{\theta-1} C_{t+i}} \\ \frac{p_t^*}{P_t} &= \left(\frac{\theta}{\theta-1}\right) \frac{E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i C_{t+i}^{1-\sigma} \phi_{t+i} \left(\frac{P_{t+i}}{P_t}\right)^\theta}{E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i C_{t+i}^{1-\sigma} \left(\frac{P_{t+i}}{P_t}\right)^{\theta-1}}\end{aligned}\tag{C26}$$

ここからは式 (C26) を用いて  $\omega = 0$  の時とそうでない時について考察する。まず、 $\omega = 0$  の時、

$$\frac{p_t^*}{P_t} = \left(\frac{\theta}{\theta-1}\right) \phi_t = \mu \phi_t\tag{C27}$$

それぞれの企業は価格  $p_t^*$  を設定する。価格  $p_t^*$  は名目限界費用  $P_t \phi_t$  に markup  $\mu > 1$  を乗じた値になる。この結果は独占的競争モデルでは標準的な結果である。なぜなら、価格が限界費用を超えているから、産出が非効率的に低くなっている。価格が完全に柔軟に変更される場合（つまり今のように  $\omega = 0$  の時）には企業はどれも同じ価格をつける。この場合には  $p_t^* = P_t$  かつ  $\phi_t = 1/\mu$  となる。実質限界費用の定義を使って

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{Z_t}{\mu}\tag{C28}$$

が伸縮価格での均衡になる。それに加えて余暇と消費の代替に関する限界率を加えて

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{Z_t}{\mu} = \frac{\chi N_t^\eta}{C_t^{1-\sigma}}\tag{C29}$$

ここから  $\hat{x}_t$  を変数  $X_t$  の定常状態からの乖離を表すとする。また添え字  $f$  は伸縮価格での均衡を表すこととする。式 (C29) を定常状態近傍で近似して

$$\eta \hat{n}_t^f + \sigma \hat{c}_t^f = \hat{z}_t^f\tag{C30}$$

また生産関数

$$\hat{y}_t^f = \hat{n}_t^f + \hat{z}_t^f\tag{C31}$$

と合理的期待均衡

$$\hat{y}_t^f = \hat{c}_t^f\tag{C32}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\eta \hat{n}_t^f + \sigma \hat{c}_t^f &= \hat{z}_t^f \\ \eta(\hat{y}_t^f - \hat{z}_t^f) + \sigma \hat{y}_t^f &= \hat{z}_t^f\end{aligned}\tag{C33}$$

よって

$$\hat{y}_t^f = \left(\frac{1+\eta}{\sigma+\eta}\right) \hat{z}_t\tag{C34}$$

これが伸縮価格の場合の均衡産出量である。

次に  $\omega > 0$  である場合（つまり価格が粘着的である場合）を考える。

$$P_t^{1-\theta} = (1-\omega)(p_t^*)^{1-\theta} + \omega P_{t-1}^{1-\theta} \quad (\text{C35})$$

次に New Keynesian Phillips 曲線について述べるが、その導出は後述する。

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \tilde{\kappa} \hat{\phi}_t \quad (\text{C36})$$

ここで

$$\tilde{\kappa} = \frac{(1-\omega)(1-\beta\omega)}{\omega} \quad (\text{C37})$$

式 (C36) を New Keynesian Phillips 曲線 (NKPC) という。従来の Phillips 曲線と異なり NKPC は forward-looking である。NKPC はエージェントの最適化から導き出されたものであり、ミクロ経済学的基礎を持つという点で、従来の Phillips 曲線とは異なっている。また、NKPC を書き直すと、

$$\pi_t = \tilde{\kappa} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i E_t \hat{\phi}_{t+i} \quad (\text{C38})$$

ここまでの表記では NKPC は実質限界費用にしか依存しないように見えるがそうではない。企業の限界費用は以下の形で表されることはすでに見た。

$$\phi_t = \frac{W_t/P_t}{Z_t} \quad (\text{C39})$$

これを定常状態からの変化率の式に直すと

$$\hat{\phi}_t = (\hat{w}_t - \hat{p}_t) - \hat{z}_t \quad (\text{C40})$$

また、伸縮価格均衡においては、すべての企業はまったく同じ価格をつけるために式 (C29) から

$$\hat{w}_t - \hat{p}_t = \eta \hat{n}_t + \sigma \hat{y}_t, \quad (\hat{y}_t = \hat{c}_t) \quad (\text{C41})$$

また、 $\hat{y}_t = \hat{n}_t + \hat{z}_t$  を用いて

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_t &= (\hat{w}_t - \hat{p}_t) - \hat{z}_t \\ &= (\eta \hat{n}_t + \sigma \hat{y}_t) - \hat{z}_t \\ &= (\eta(\hat{y}_t - \hat{z}_t) + \sigma \hat{y}_t) - \hat{z}_t \\ &= (\sigma + \eta) \hat{y}_t - (1 + \eta) \hat{z}_t \\ &= (\sigma + \eta) \left[ \hat{y}_t - \left( \frac{1 + \eta}{\sigma + \eta} \right) \hat{z}_t \right] \\ &= \gamma (\hat{y}_t - \hat{y}_t^f) \end{aligned} \quad (\text{C42})$$

ただし、 $\gamma = \sigma + \eta$  である。またこの結果を使って NKPC を書き直すと

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t \quad (\text{C43})$$

ここで  $x_t = \hat{y}_t - \hat{y}_t^f$  は価格粘着性がある実世界の産出と伸縮価格での産出のギャップ (New Keynesian 型の産出ギャップ [GDP ギャップ]) である<sup>21</sup>。ただし、 $\gamma\kappa = \gamma(1-\omega)(1-\beta\omega)/\omega$

次に New Keynesian IS 曲線を導出する。表記を簡単にするため  $I_t = (1+i_t)$  と記号を置き換え、式 (C15) と  $Y_t = C_t$  を用いて

$$\begin{aligned}
Y_t^{-\sigma} &= \beta(I_t)E_t\pi_{t+1}^{-1}Y_{t+1}^{-\sigma}, \quad [\pi_{t+1}^{-1} = \frac{P_t}{P_{t+1}}] \\
(Ye^{\hat{y}_t})^{-\sigma} &= \beta I e^{\hat{i}_t} E_t \pi e^{\hat{\pi}_{t+1}} (Y e^{\hat{y}_{t+1}})^{-\sigma} \\
1 - \sigma \hat{y}_t &= \beta I \pi (1 + \hat{i}_t) E_t (1 - \hat{\pi}_{t+1}) (1 - \sigma \hat{y}_{t+1}) \\
[\beta I \pi^{-1} &= 1] \\
\hat{y}_t &= E_t \hat{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) \\
\hat{y}_t - \hat{y}_t^f &= (E_t \hat{y}_{t+1} - E_t \hat{y}_{t+1}^f) - \frac{1}{\sigma} (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) + E_t \hat{y}_{t+1}^f - \hat{y}_t^f \\
x_t &= E_t x_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (\hat{i}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) + u_t
\end{aligned} \tag{C44}$$

ただし、ここで  $u_t = E_t \hat{y}_{t+1}^f - \hat{y}_t^f$  をあらわす。この式を New Keynesian IS 曲線 (NKIS) という。NKPC と NIS が New Keynesian における金融分析の重要三要素のうちの一つである (三つ目の要素は名目金利を用いた政策ルールである)。NKPC は供給側の関係を表し、NKIS は需要側の関係を表している。

続いて NKPC の導出を行う。

$$\frac{p_t^*}{P_t} = \left( \frac{\theta}{\theta - 1} \right) \frac{E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i C_{t+i}^{1-\sigma} \phi_{t+i} \left( \frac{P_{t+i}}{P_t} \right)^\theta}{E_t \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i C_{t+i}^{1-\sigma} \left( \frac{P_{t+i}}{P_t} \right)^{\theta-1}} \tag{C45}$$

$$P_t^{1-\theta} = (1-\omega)(p_t^*)^{1-\theta} + \omega P_{t-1}^{1-\theta} \tag{C46}$$

我々はインフレ率の定常状態をゼロとおき、そのゼロからはずれたインフレ率を表現することを考える。 $Q_t = p_t^*/P_t$  を (価格調整の機会を得た) すべての企業が期間  $t$  に製品価格を調整した場合の製品価格と物価水準の相対価格を意味する。均衡での  $Q_t$  は  $Q = 1$  である。また、 $Q_t$  は各期にすべての企業が製品価格を調整できた場合に 1 となる。次に式を変形していく。

$$\begin{aligned}
1 &= (1-\omega) \left( \frac{p_t^*}{P_t} \right)^{1-\theta} + \omega \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{-(1-\theta)} \\
1 &= (1-\omega) Q_t^{1-\theta} + \omega \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right)^{-(1-\theta)} \\
1 &= (1-\omega) (Q^{SS})^{1-\theta} (1 + (1-\theta)\hat{q}_t) + \omega (\pi^{SS})^{1-\theta} (1 - (1-\theta)\pi_t)
\end{aligned} \tag{C47}$$

また、均衡状態では

$$1 = (1-\omega)(Q^{SS})^{1-\theta} + \omega(\pi^{SS})^{1-\theta} \tag{C48}$$

<sup>21</sup>ここで現れる New Keynesian 型の産出ギャップは Krugman (1998) にすでに現れていることに注目。Krugman は価格硬直性をモデルの外部から前提として入れてやることにより、New Keynesian 型の産出ギャップを導出している。

が成り立つ。これを用いて

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - \omega)\hat{q}_t - \omega\pi_t \\ \hat{q}_t &= \frac{\omega}{1 - \omega}\pi_t \end{aligned} \quad (C49)$$

が成り立つ。次に

$$E_t \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i C_{t+i}^{1-\sigma} \left( \frac{P_{t+i}}{P_t} \right)^{\theta-1} \right] Q_t = \mu E_t \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i C_{t+i}^{1-\sigma} \phi_{t+i} \left( \frac{P_{t+i}}{P_t} \right)^{\theta} \right] \quad (C50)$$

について考える(ただし  $\mu = \theta/(\theta - 1)$ )。まず左辺を変形する。

$$\begin{aligned} & E_t \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i (C e^{\hat{c}_{t+i}})^{1-\sigma} \left( \frac{P e^{\hat{p}_{t+i}}}{P e^{\hat{p}_t}} \right)^{\theta-1} \right] Q e^{\hat{q}_t} \\ &= \frac{C^{1-\sigma}}{1 - \omega\beta} + \frac{C^{1-\sigma}}{1 - \omega\beta} \hat{q}_t + C^{1-\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i [(1 - \sigma) E_t \hat{c}_{t+i} + (\theta - 1)(E_t \hat{p}_{t+i} - \hat{p}_t)] \end{aligned} \quad (C51)$$

右辺は

$$\begin{aligned} & \mu E_t \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i (C e^{\hat{c}_{t+i}})^{1-\sigma} \phi e^{\hat{\phi}_{t+i}} \left( \frac{P e^{\hat{p}_{t+i}}}{P e^{\hat{p}_t}} \right)^{\theta} \right] \\ &= \frac{C^{1-\sigma}}{1 - \omega\beta} + C^{1-\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i [E_t \hat{\phi}_{t+i} + (1 - \sigma) E_t \hat{c}_{t+i} + \theta(E_t \hat{p}_{t+i} - \hat{p}_t)] \end{aligned} \quad (C52)$$

ただし途中で  $\mu = 1/\phi$  を用いた。よって

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - \omega\beta} \hat{q}_t + \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i [(1 - \sigma) E_t \hat{c}_{t+i} + (\theta - 1)(E_t \hat{p}_{t+i} - \hat{p}_t)] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i [E_t \hat{\phi}_{t+i} + (1 - \sigma) E_t \hat{c}_{t+i} + \theta(E_t \hat{p}_{t+i} - \hat{p}_t)] \\ & \hat{q}_t + \hat{p}_t = (1 - \omega\beta) \sum_{i=0}^{\infty} \omega^i \beta^i (E_t \hat{\phi}_{t+i} + E_t \hat{p}_{t+i}) \end{aligned} \quad (C53)$$

左辺は最適な名目価格  $\hat{p}^* = \hat{q}_t + \hat{p}_t$  であり、それが未来の名目限界費用の割引現在価値に等しい。この式は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \hat{q}_t + \hat{p}_t &= (1 - \omega\beta)(\hat{\phi}_t + \hat{p}_t) + \omega\beta(E_t \hat{q}_{t+1} + E_t \hat{p}_{t+1}) \\ \hat{q}_t &= (1 - \omega\beta)\hat{\phi}_t + \omega\beta(E_t \hat{q}_{t+1} + E_t \hat{p}_{t+1} - \hat{p}_t) \\ \hat{q}_t &= (1 - \omega\beta)\hat{\phi}_t + \omega\beta(E_t \hat{q}_{t+1} + E_t \pi_{t+1}) \end{aligned} \quad (C54)$$

$\hat{q}_t = (\omega/(1 - \omega))\pi_t$  より

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{1 - \omega} \pi_t &= (1 - \omega\beta)\hat{\phi}_t + \omega\beta \left[ \frac{\omega}{1 - \omega} E_t \pi_{t+1} + E_t \pi_{t+1} \right] \\ &= (1 - \omega\beta)\hat{\phi}_t + \frac{\omega\beta}{1 - \omega} E_t \pi_{t+1} \end{aligned} \quad (C55)$$

よって以下の関係を得る。

$$\pi_t = \kappa \hat{\phi}_t + \beta E_t \pi_{t+1} \quad (\text{C56})$$

ここで  $\kappa = \frac{(1-\omega)(1-\omega\beta)}{\omega}$ 。この式を new Keynesian Phillips 曲線という。

式 (C16) から LM 曲線を導出する。  $i_t \ll 1$  より式 (C16) は以下のように書き直せる (ただし、  $\gamma = 1$  とする)。

$$\frac{\left(\frac{M_t}{P_t}\right)^{-b}}{C_t^{-\sigma}} = i_t \quad (\text{C57})$$

対数線形化を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\gamma \left(\frac{M \exp(\hat{m}_t)}{P \exp(\hat{p}_t)}\right)^{-b}}{(C \exp(\hat{c}_t))^{-\sigma}} &= i \exp(\hat{i}_t) \\ \exp(-b(\hat{m}_t - \hat{p}_t)) &= \exp(\hat{i}_t - \sigma \hat{c}_t) \\ 1 - b(\hat{m}_t - \hat{p}_t) &= 1 + \hat{i}_t - \sigma \hat{c}_t \end{aligned} \quad (\text{C58})$$

よって以下の LM 曲線を得る。

$$\hat{m}_t - \hat{p}_t = -\frac{1}{b} \hat{i}_t + \frac{\sigma}{b} \hat{c}_t \quad (\text{C59})$$

## 付録 D Sims (2002) による線形合理期待モデルの解法

Sims (2002) による線形合理的期待モデルの解を求めるアルゴリズムの概要を解説する<sup>22</sup>。Sims (2002) は Blanchard and Kahn (1980) と同様に線形合理的期待モデルの解を求めるアルゴリズムであるが、(1) 変数を先決 (predetermined) 変数、非先決 (non-predetermined) 変数<sup>23</sup>に先見的に分類する必要がない、(2) 内生変数ベクトルにかかる行列 (後述する  $\Gamma_0$  と  $\Gamma_1$ ) が特異であっても構わないなどいくつかの違いがある。

線形合理的期待モデルは以下の形で定式化される。

$$\Gamma_0 \mathbf{y}_t = \Gamma_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{C} + \Psi \mathbf{z}_t + \Pi \boldsymbol{\eta}_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (\text{D60})$$

$\mathbf{y}_t$  は  $n \times 1$  の状態変数、 $\mathbf{C}$  は  $n \times 1$  の定数ベクトル、 $\mathbf{z}_t$  は  $m \times 1$  の外生変数、 $\boldsymbol{\eta}_t$  はすべての  $t$  に対し  $E_t \boldsymbol{\eta}_{t+1} = 0$  を満たすような  $r \times 1$  の誤差項である。また、 $\Gamma_0$ 、 $\Gamma_1$ 、 $\Psi$ 、 $\Pi$  はそれぞれ  $n \times n$ 、 $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $n \times r$  の行列である。なお、 $\Gamma_0$ 、 $\Gamma_1$  は特異であっても構わない。さらに、外生変数  $\mathbf{z}_t$  は平均がゼロである独立同分布の確率変数とする<sup>24</sup>。

上記の線形合理的期待モデルの解を求める前に、「その安定的な解とは何か」について検討する。はじめに内生変数  $\mathbf{y}_t$  のすべての要素に共通するある上限値 (もしくは下限値)  $\bar{\xi}$  があると仮定する。その場合に  $\mathbf{y}_t$  が外生変数  $\mathbf{z}_t$  と過去の内生変数  $\mathbf{y}_{t-s}$ ,  $s > 1$  ( $t$  期においては外生) を用いて表され、 $\mathbf{y}_t$  を未来までシミュレーションしても発散しないことが必要である。つまり、内生変数の初期条件  $\mathbf{y}_0$  と外生変数  $\{\mathbf{z}_t\}_{t=1}^{\infty}$  を与えた時に、 $\mathbf{y}_t$  が上限値 (もしくは下限値) を超えて発散していかないことが安定的な解には必要である<sup>25</sup>。

<sup>22</sup>Yakhin (2007) を参考にした。

<sup>23</sup>非先決変数はジャンプ変数と呼ばれることもある。

<sup>24</sup>Sims (2002) は  $\mathbf{z}_t$  に系列相関のある場合も許容しているが、本節では簡単化のため Yakhin (2007) に従い  $\mathbf{z}_t$  は平均がゼロで独立同分布の場合のみを考える。

<sup>25</sup>なお、ここでの議論は数学的に厳密なものではないため、正式には Sims (2002) を参照のこと。

QZ分解を用いて  $\Gamma_0$ 、 $\Gamma_1$  をユニタリ-行列と上三角行列に分解する。

$$\begin{aligned} Q' \Lambda Z' &= \Gamma_0 \\ Q' \Omega Z' &= \Gamma_1. \end{aligned} \quad (D61)$$

ここで  $Q$  と  $Z$  は  $Q'Q = Z'Z = I$  を満たし (ユニタリ-行列の定義)、複素数行列でも構わない。また、 $'$  は転置と複素共役を表す。さらに、 $\Omega$  と  $\Lambda$  は上三角行列であり、複素数行列でも構わない。QZ分解は常に存在するため、式 (D60) の両辺に  $Q$  を掛け、以下の式を得る。

$$\Lambda w_t = \Omega w_{t-1} + QC + Q\Pi\eta_t + Q\Psi z_t, \quad (D62)$$

ただし、 $w_t = Z'y_t$  である。

QZ分解は一意的ではないが、 $\Omega$  と  $\Lambda$  の対角成分の比である一般化固有値  $\{\omega_{ii}/\lambda_{ii}\}$  は一意である (ただし、一般化固有値が無限大になる場合を許容する必要がある)<sup>26</sup>。さらに一般化固有値を絶対値で昇順に並べなおす (つまり、絶対値が最も小さい一般化固有値が左上に、最も大きい一般化固有値が右下になる)。次に一般化固有値が  $\bar{\xi}$  より大きい小さいかで式 (D62) を分割する。 $|\omega_{ii}/\lambda_{ii}| < \bar{\xi}$  ある場合には  $i \leq k$  となり、 $|\omega_{ii}/\lambda_{ii}| \geq \bar{\xi}$  ある場合には  $i > k$  となるように  $k$  を定める。よって式 (D62) は以下のように展開できる。

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,t} \\ w_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \mathbf{0} & \Omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,t-1} \\ w_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} [C + \Psi z_t + \Pi\eta_t]. \quad (D63)$$

ここで  $\Lambda_{22}$  の対角成分のいくつかがゼロになる可能性がある。以上のように一般化固有値をグループ化したため、式 (D62) の下側ブロックは内生変数の経路が発散する (これは下側ブロックの一般化固有値が  $\bar{\xi}$  以上であるため)。この場合、 $w_{2,t}$  を未来の  $z_t$  と未来の誤差項  $\eta_t$  の関数として前向きに解けば、発散を防ぐことができる。 $M = \Omega_{22}^{-1} \Lambda_{22}$ 、 $x_t = Q[C + \Psi z_t + \Pi\eta_t]$  として、下側ブロックの  $w_{2,t}$  をフォワードに解くと以下ようになる (以下、表記の簡単化のため断りなく  $E_t$  を省略することがある)。

$$\begin{aligned} w_{2,t} &= M w_{2,t+1} - \Omega_{22}^{-1} x_{2,t+1} \\ &= M^2 w_{2,t+2} - M \Omega_{22}^{-1} x_{2,t+2} - \Omega_{22}^{-1} x_{2,t+1} \\ &= - \sum_{s=1}^{\infty} M^{s-1} \Omega_{22}^{-1} x_{2,t+s} \\ &= - \sum_{s=1}^{\infty} M^{s-1} \Omega_{22}^{-1} Q_2 [C + \Psi z_{t+s} + \Pi\eta_{t+s}]. \end{aligned} \quad (D64)$$

<sup>26</sup> $\Gamma_0$  と  $\Gamma_1$  の同じ固有ベクトルに対応する固有値がゼロの場合には一般化固有値は不定となる。

なお、 $\lim_{t \rightarrow \infty} M^t \mathbf{w}_{2,t} = 0$  を仮定した。さらに  $E_t[\eta_{t+1}] = E_t[z_{t+1}] = 0$  であることを利用して

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{2,t} &= - \sum_{s=1}^{\infty} M^{s-1} \Omega_{22}^{-1} Q_2 \cdot C \\ &= (\Lambda_{22} - \Omega_{22})^{-1} Q_2 \cdot C. \end{aligned} \quad (\text{D65})$$

なお、 $\lim_{t \rightarrow \infty} M^t = 0$  を仮定した。次に線形合理的期待モデルを解くには誤差項  $\eta_t$  を削除する必要がある。

$$\begin{aligned} E_t \left[ \sum_{s=1}^{\infty} M^{s-1} \Omega_{22}^{-1} \mathbf{x}_{2,t+s} \right] &= \sum_{s=1}^{\infty} M^{s-1} \Omega_{22}^{-1} \mathbf{x}_{2,t+s} \\ E_t \left[ \sum_{s=1}^{\infty} M^{s-1} \Omega_{22}^{-1} Q_2 \cdot [C + \Psi z_{t+s} + \Pi \eta_{t+s}] \right] &= \sum_{s=1}^{\infty} M^{s-1} \Omega_{22}^{-1} Q_2 \cdot [C + \Psi z_{t+s} + \Pi \eta_{t+s}]. \end{aligned} \quad (\text{D66})$$

両辺から  $C$  を削除し、 $\eta_{t+1} = z_{t+1} = 0$  を用いて、

$$\sum_{s=1}^{\infty} M^{s-1} \Omega_{22}^{-1} Q_2 \cdot [\Psi z_{t+s} + \Pi \eta_{t+s}] = 0. \quad (\text{D67})$$

時間  $t+1$  より未来のショックはすべて削除し、1期進めると以下の式を得る。

$$Q_2 \cdot \Pi \eta_t = -Q_2 \cdot \Psi z_t. \quad (\text{D68})$$

式 (D68) が合理的期待解が存在する条件である。式 (D68) が成立しても式 (D63) の上側ブロックには  $\eta_t$  に依存する項 ( $Q_1 \cdot \Pi \eta_t$  と  $\Phi Q_2 \cdot \Pi \eta_t$ ) が残っている。この二つの項で相殺することができれば、 $\eta_t$  を式 (D63) から削除することができる。つまり、以下の式が成り立てばよい。

$$Q_1 \cdot \Pi = \Phi Q_2 \cdot \Pi. \quad (\text{D69})$$

ここで  $\Phi$  は  $k \times (n-k)$  の行列である。

$[I \quad -\Phi]$  を式 (D63) に掛け、式 (D65) と組み合わせて以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} - \Phi \Lambda_{22} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1,t} \\ \mathbf{w}_{2,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} - \Phi \Omega_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{1,t-1} \\ \mathbf{w}_{2,t-1} \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} Q_1 \cdot -\Phi Q_2 \cdot \\ (\Omega_{22} - \Lambda_{22})^{-1} Q_2 \cdot \end{bmatrix} C + \begin{bmatrix} Q_1 \cdot -\Phi Q_2 \cdot \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Psi z_t. \end{aligned} \quad (\text{D70})$$

次に  $\mathbf{w}_t = Z' \mathbf{y}_t$  を用いて以下の式を得る。

$$\begin{aligned} JZ' \mathbf{y}_t &= \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} - \Phi \Omega_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} Z' \mathbf{y}_{t-1} \\ &\quad + \begin{bmatrix} Q_1 \cdot -\Phi Q_2 \cdot \\ (\Omega_{22} - \Lambda_{22})^{-1} Q_2 \cdot \end{bmatrix} C + \begin{bmatrix} Q_1 \cdot -\Phi Q_2 \cdot \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Psi z_t. \end{aligned} \quad (\text{D71})$$

最終的に以下の式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
 y_t = & H \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} - \Phi\Omega_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z' y_{t-1} \\
 & + H \begin{bmatrix} Q_{1\cdot} - \Phi Q_{2\cdot} \\ (\Omega_{22} - \Lambda_{22})^{-1} Q_{2\cdot} \end{bmatrix} C + H \begin{bmatrix} Q_{1\cdot} - \Phi Q_{2\cdot} \\ 0 \end{bmatrix} \Psi z_t.
 \end{aligned} \tag{D72}$$

ただし、 $H = ZJ^{-1}$  である。式 (D72) が線形的合理的期待モデル [式 (D60)] の解である。つまり、初期条件  $y_0$  と  $\{z_t\}_0^\infty$  を与えると、内生変数  $y_t$  の (発散しない) 経路を生成できる。

## 付録 E 対数線形化について

本節では Uhlig (1997) でまとめられた対数線形化の公式について記述する。ここで述べる公式を使うと、DSGE の 1 階条件の対数線形化を機械的に行うことができる。

あるマクロ変数を  $X_t$  とおき、 $X_t$  の定常状態での値を  $\bar{X}$  とする。あるマクロ変数の定常状態からの乖離を対数に直して表すと

$$x_t = \log X_t - \log \bar{X}$$

$x_t \ll 1$  と仮定すると以下の関係が成り立つ。

$$X_t = \bar{X} e^{x_t} \sim \bar{X} (1 + x_t)$$

マクロ変数  $Y_t$  にも同様な仮定を置くと

$$X_t Y_t = \bar{X} \bar{Y} e^{x_t + y_t} \sim \bar{X} \bar{Y} (1 + x_t + y_t)$$

これだけでほとんどの DSGE の 1 階条件を対数線形化できる。

## 参 考 文 献

- Amisano, G. and O. Tristani**, “Euro Area Inflation Persistence in an Estimated Nonlinear DSGE Model,” 2007. ECB Working Paper No. 754.
- An, S. and F. Schorfheide**, “Bayesian analysis of DSGE models,,” *Econometric Reviews*, 2007, 26 (2-4), 113–172.
- Arai, R.**, “Dynere の使い方,” Technical Report 2008. <http://real-a.net/mydocs/dynare.pdf>.
- Barillas, F., R. Colacito, S. Kitao, C. Matthes, T. Sargent, and Y. Shin**, “Practicing DYNARE,” 2007. [ftp://zia.stanford.edu/pub/sargent/webdocs/research/AP\\_tom16.pdf](ftp://zia.stanford.edu/pub/sargent/webdocs/research/AP_tom16.pdf).
- Black, R., V. Cassino, A. Drew, E. Hansen, B. Hunt, D. Rose, and A. Scott**, “The Forecasting and Policy System: The Core Model,” *Reserve Bank of New Zealand Research Paper*, 1997, (43).
- Blanchard, O. J. and C. M. Kahn**, “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations,” *Econometrica*, 1980, 48 (5), 1305–1311.



- Calvo, G. M.**, “Staggered prices in a utility-maximizing framework,” *Journal of Monetary Economics*, 1983, 12 (3), 383–398.
- Christiano, L. J., M. Eichenbaum, and C. Evans**, “Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy,” *Journal of Political Economy*, 2005, 113 (1), 1–45.
- Clarida, R., J. Gali, and M. Gertler**, “The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective,” *Journal of Economic Literature*, 1999, 37 (4), 1661–1707.
- , —, and —, “Monetary Policy Rules And Macroeconomic Stability: Evidence And Some Theory,” *The Quarterly Journal of Economics*, 2000, 115 (1), 147–180.
- Coenen, Gunter and Roland Straub**, “Does Government Spending Crowd in Private Consumption? Theory and Empirical Evidence for the Euro Area,” *International Finance*, December 2005, 8 (3), 435–470.
- Collard, F. and M. Juillard**, “Accuracy of stochastic perturbation methods: The case of asset pricing models,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2001, 25 (6-7), 979–999.
- and —, “Stochastic simulations with DYNARE. A practical guide.,” 2001. Dynare Manual (<http://www.cepremap.cnrs.fr/juillard/mambo/download/manual/guide.pdf>).
- Del Negro, M., F. Schorfheide, F. Smets, and R. Wouters**, “On the Fit of New Keynesian Models,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 2007, 25 (21), 123–143.
- Ereceg, C. J., L. Guerrieri, and C. Gust**, “SIGMA: A New Open Economy Model for Policy Analysis,” *International Journal of Central Banking*, 2006, 2 (1), 1–50.
- Ereceg, C.J., D. W. Henderson, and A. T. Levin**, “Optimal monetary policy with staggered wage and price contracts,” *Journal of Monetary Economics*, 2000, 46 (2), 281–313.
- Fernandez-Villaverde, J. and J. F. Rubio-Ramirez**, “Estimating dynamic equilibrium economies: linear versus nonlinear likelihood,” *Journal of Applied Econometrics*, 2005, 20 (7), 891–910.
- and —, “Estimating Macroeconomic Models: A Likelihood Approach,” *Review of Economic Studies*, 2007. Forthcoming.
- Fout, H.**, “Can New Keynesian Models of the Business Cycle Explain U.S. Wage Behavior?,” *Manuscript*, 2005.
- Fuhrer, Jeff and George Moore**, “Inflation Persistence,” *The Quarterly Journal of Economics*, February 1995, 110 (1), 127–59.
- Fujiwara, I., N. Hara, Y. Hirose, and Y. Teranishi**, “The Japanese Economic Model (JEM),” *Monetary and Economic Studies*, 2005, 23 (2), 61–142.
- Gali, J.**, “New Perspectives on Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle,” NBER Working Papers 8767, National Bureau of Economic Research, Inc February 2002.
- , *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*, New Jersey: Princeton University Press, 2008.

- , **J. D. Lopez-Salido, and J. Valles**, “Rule-of-Thumb Consumers and the Design of Interest Rate Rules,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 2004, 36 (4), 739–763.
- Gali, Jordi, J. David Lo’pez-Salido, and Javier Valle’s**, “Understanding the Effects of Government Spending on Consumption,” *Journal of the European Economic Association*, 03 2007, 5 (1), 227–270.
- Gordon, N., D. Salmond, and A. Smith**, “Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation,” *IEEE Proceedings-F*, 1993, 140, 107–113.
- Hayashi, F. and E. C. Prescott**, “The 1990s in Japan: A Lost Decade,” *Review of Economic Dynamics*, 2002, 5 (1), 206–235.
- Hirose, Y. and S. Naganuma**, “Structural Estimation of the Output Gap: A Bayesian DSGE Approach for the U.S. Economy,” 2007. Bank of Japan Working Paper Series No. 07-E-24.
- Iiboshi, H., S. Nishiyama, and T. Watanabe**, “An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Japanese Economy: A Bayesian Analysis,” *Mimeo*, 2005.
- Juillard, M.**, “Dynare: A program for the resolution and simulation of dynamic models with forward variables through the use of a relaxation algorithm,” 1996. CEPREMAP.
- Kimball, M. S.**, “The Quantitative Analytics of the Basic Neomonetarist Model,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 1995, 27 (4), 1241–77.
- King, Robert G.**, “The new IS-LM model : language, logic, and limits,” *Economic Quarterly*, 2000, (Sum), 45–103.
- Kitagawa, G.**, “Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models,” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1996, 5 (1), 1–25.
- , “A self-organizing state-space model,” *Journal of the American Statistical Association*, 1998, 93 (443), 1203–1215.
- Krugman, P.**, “It’s Baaack: Japan’s Slump and the Return of the Liquidity Trap,” *Brookings Papers on Economic Activity*, 1998, 2, 137–187.
- Levin, A. T., A. Onatski, J. C. Williams, and N. Williams**, “Monetary policy under uncertainty in micro-founded macroeconomic models,” *Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper, No. 2005-15*, 2005.
- Liu, P.**, “DYNARE for Macroeconomic Analysis: CAMA Lecture,” 2006. Lecture Note (<http://www.philip-liu.net/>).
- Mancini Griffoli, T.**, “DYNARE USER GUIDE,” 2007.  
[http://www.cepremap.cnrs.fr/dynare/download/manual/Dynare\\_UserGuide\\_WebBeta.pdf](http://www.cepremap.cnrs.fr/dynare/download/manual/Dynare_UserGuide_WebBeta.pdf).
- Mankiw, N. G.**, “The Savers-Spenders Theory of Fiscal Policy,” *American Economic Review*, 2000, 90 (2), 120–125.
- McCallum, B. T.**, “Should Monetary Policy Respond Strongly to Output Gaps?,” *American Economic Review*, 2001, 91 (2), 258–262.

- Mccallum, B. T. and E. Nelson**, “An Optimizing IS-LM Specification for Monetary Policy and Business Cycle Analysis,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 1999, 31 (3), 296–316.
- Onatski, Alexei and Noah Williams**, “Empirical and policy performance of a forward-looking monetary model,” *Proceedings*, 2004, (Mar).
- Ratto, Marco, Werner Roeger, and Jan in ’t Veld**, “QUEST III: An estimated open-economy DSGE model of the euro area with fiscal and monetary policy,” *Economic Modelling*, 2008. Forthcoming.
- Roberts, J. M.**, “New Keynesian Economics and the Phillips Curve,” *Journal of Money, Credit and Banking*, November 1995, 27 (4), 975–84.
- Schmitt-Grohe, S. and M. Uribe**, “Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2004, 28 (4), 755–775.
- Schorfheide, F.**, “Loss function-based evaluation of DSGE models,” *Journal of Applied Econometrics*, 2000, 15 (6), 645–670.
- Sims, C. A.**, “Solving Linear Rational Expectations Models,” *Computational Economics*, 2002, 20 (1-2), 1–20.
- Smets, F. and R. Wouters**, “An Estimated Stochastic Dynamic General Equilibrium Model of the Euro Area,” *Journal of European Economic Association*, 2003, 1 (5), 1123–1175.
- Sugo, T. and K. Ueda**, “Estimating a Dynamic Stochastic General Equilibrium Model for Japan,” *Journal of the Japanese and International Economics*, 2008. forthcoming.
- Trabandt, M.**, “Sticky Information vs. Sticky Prices: A Horse Race in a DSGE Framework,” *Manuscript*, 2006. Social Science Research Network Working Paper, No. 455140.
- Uhlig, H.**, “A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily,” 1997. Manuscript.
- Walsh, C.**, *Monetary Theory and Policy*, Cambridge: MIT Press, 2003.
- Woodford, M.**, *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton: Princeton University Press, 2003.
- Yakhin, Y.**, “Solving Linear Rational Expectations Models - The Mechanics,” 2007. Lecture Note. <http://www.bgu.ac.il/~yossi/teaching/teaching.html>.
- Yano, K.**, “Dynamic stochastic general equilibrium models under the liquidity trap and self-organizing state space modeling,” *Manuscript*, 2008.
- Yun, T.**, “Nominal price rigidity, money supply endogeneity, and business cycles,” *Journal of Monetary Economics*, 1996, 37 (2-3), 345–370.
- 畑農鋭矢, 「財政赤字のマクロ経済効果 - カルマン・フィルタによる中立命題の検証 - 」 『フィナンシャル・レビュー』, 2004, 2004 (74), 65–91.
- 吉野直行・義村政治, 「金融政策の変化とマネーサプライ」 『現代マクロ経済分析 転換期の日本経済』, 東京: 東京大学出版, 1997, 第2章, pp. 57–83.

加藤涼, 現代マクロ経済学講義 動学的一般均衡モデル入門, 東洋経済新報社, 2006.

加藤涼・平田英明, 「動学的一般均衡モデルへの招待—新しい ISLM/ADAS 分析」 『日本経済研究』, 2007, (57).