

13 日本の景気循環の構造変化

渡部敏明

要 旨

本稿では、1984年1月から2008年12月までの内閣府経済社会総合研究所の景気一致指数（CI）を用いて、日本の景気循環の構造変化について計量分析を行った。具体的には、CIの平均成長率が景気拡張期と後退期とで変化するマルコフ・スイッチング・モデルと、それにさらに1から3までの構造変化点を付加し、景気拡張期と後退期の平均成長率が各構造変化点で変化するモデルをマルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC）を用いてベイズ推定した。また、構造変化点の数の異なるモデルのなかから事後オッズ比によってモデル選択を行うことで、構造変化点の数と時期について特定化した。その結果、(1)過去25年間の日本の景気循環には構造変化点が2箇所あること、(2)それらはバブル崩壊後の1991年8月と景気回復のスピードが減速した2004年8月である可能性が最も高いこと、(3)前者の構造変化は、CIの景気拡張期、後退期の平均成長率をいずれも低下させ、後者の構造変化は、それらをさらに低下させたことが明らかになった。

本稿に対して、内閣府「バブル・デフレ研究会・マクロ分科会」の参加者から有意義なコメントを頂いた。ここに記して感謝を表したい。ただし、本稿に残された誤りはすべて筆者の責任に負うものである。

1 はじめに

1980年代半ば以降の日本経済は、バブルとその崩壊、その後の「失われた10年」と呼ばれる停滞期などを経験した。また、「失われた10年」の景気停滞を受けて、日銀の金融政策もゼロ金利政策や量的緩和政策などの非伝統的金融政策への転換を余儀なくされている。さらに、最近では、リーマン・ショックに代表されるアメリカの金融危機が日本経済にも深刻な影響を与えている。こうしたなか、日本の景気循環にも構造変化が生じている可能性が高い。そこで、本稿では、1980年代半ば以降の日本の景気循環の構造変化について計量分析を行った。

本稿では、景気循環を表すモデルとして、Hamilton[1989]によって提案されたマルコフ・スイッチング・モデル（以下MSモデルと呼ぶ）を用いている。具体的には、景気には拡張期と後退期の2つの状態があり、景気を表す変数の平均成長率の値が景気拡張期と後退期とで異なり、その2つの状態の推移はマルコフ過程に従っていると仮定している。このモデルにさらに構造変化を付加し、景気拡張期と後退期の平均成長率が各構造変化点で変化するものとして、景気循環の構造変化の分析を行っている。構造変化の推移には、Chib[1998]に従い、非可逆的マルコフ・スイッチング・モデルを用いている。同様の方法を用いて景気循環の構造変化について分析しているものに、Kim and Nelson[1999a]と渡部・飯星[2007]がある。前者が構造変化点の数を1に限定しているのに対して、後者は構造変化点の数が複数である場合も考え、構造変化点の数まで選択を行っている。本稿でも、渡部・飯星[2007]に従い、構造変化点の数が複数である場合も考え、構造変化点の数まで選択を行っている。

推定方法には、Chib[1998]、Kim and Nelson[1999a]、渡部・飯星[2007]同様、マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC）を用いたベイズ推定を採用

している¹⁾。従来のベイズ推定は、モデルのパラメータにデータを観測する前の分布である事前分布を設定し、それをベイズの定理によってデータを観測した後の分布である事後分布に改定し、事後分布に基づいてパラメータの推定を行うというものであった。しかし、モデルが複雑になると、ベイズの定理を用いて事後分布を解析的に求めるのが難しかったり、たとえ求まったとしても複雑であったりするので、最近のベイズ推定ではMCMCを用いて事後分布からパラメータの値をサンプリングし、サンプリングされた値を使ってパラメータを推定することが多い。MCMCとはある分布からサンプリングする場合に1回前にサンプリングされた値を用いて次の値をサンプリングする方法の総称であり、ランダム・サンプリングが難しい場合に用いられる。この方法を用いると、パラメータと構造変化点を同時推定できるので、パラメータの不確実性を考慮に入れて、構造変化点の分布を推定することができる。さらに、本稿では、Chib[1998]や渡部・飯星[2007]に従い、構造変化点の数を変えて推定を行い、ベイズ統計学でモデル比較に用いられる事後オッズ比を計算することにより、構造変化点の数まで選択している。

日本の景気を表す変数には、内閣府経済社会総合研究所が作成している景気一致指数(CI)を用いている。渡部・飯星[2007]では、1974年5月から2004年1月までのCIを用いて分析を行っているのに対して、本稿では、1984年1月から2008年12月までの最近の25年間のCIを用いて分析を行った。その結果、構造変化点の数は2が選択され、それらはバブル崩壊後の1991年8月と景気回復のスピードが減速した2004年8月である可能性が最も高いことが明らかになった。また、1991年8月以降は、それ以前と比較して景気上昇期、下降期とも景気の平均成長率が低下し、2004年8月以降は、それらがさらに低下しているとの結果が得られた。

本稿の以下の構成は、次のとおりである。次節では、まずMSモデルについて簡単に説明した後、それを複数の構造変化点を持つモデルに拡張する。第3節では、そのモデルを推定するために必要なベイズ推定、MCMCといった計量手法と構造変化点の数を選択するために必要な事後オッズ比について説明する。これらの手法の詳細については本稿の最後に補論として記し

1) MCMCやベイズ推定について詳しくは、Kim and Nelson[1999b]や和合[2005]を参照のこと。

た。第4節では、推定結果について考察し、最後に第5節で本稿の結果をまとめる。

2 複数の構造変化点をもつマルコフ・スイッチングモデル

まず最初に、構造変化のないMSモデルについて説明する。本稿で用いたMSモデルは以下のものである。

$$y_t = \mu_t + \phi(y_{t-1} - \mu_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2), \quad (13.1)$$

$$\mu_t = \mu^{(0)}(1 - S_t) + \mu^{(1)}S_t, \quad \mu^{(0)} < \mu^{(1)}, \quad (13.2)$$

$$S_t = \begin{cases} 1 & \text{景気拡張期} \\ 0 & \text{景気後退期} \end{cases} \quad (13.3)$$

ここで、(13.1)式の y_t はCIの変化率である。また、 μ_t は t 期におけるCIの平均成長率、 ε_t は誤差項を表す。この誤差項は過去と独立で同一な(identically and independently distributed; i. i. d.)正規分布に従うものとする。もし、 μ_t が常に一定であるならば、(13.1)式は通常の数1の自己回帰モデルである。MSモデルの特徴は、 μ_t の大きさが景気拡張期と後退期の間でスイッチする点にある²⁾。このことを表しているのが(13.2)式である。右辺にある S_t は(13.3)式で定義されているように景気が拡張期か後退期かを表すダミー変数であり、 $S_t=1$ ならば拡張期を、 $S_t=0$ ならば後退期を表す³⁾。したがって、平均成長率は、景気拡張期には $\mu^{(1)}$ になり、後退期には $\mu^{(0)}$ になる。(13.2)式で $\mu^{(0)} < \mu^{(1)}$ との制約を置いているのは、景気拡張期の方が後退期より平均成長率が高いことを保証するためである。さらに、MSモデルでは、 S_t はマルコフ過程に従っているものと仮定し、遷移確率を以下のように表す(本稿では、以下、確率関数および確率密度関数をすべて $\pi(\cdot)$ で表す)。

2) μ だけでなく、 ϕ や σ^2 もスイッチするモデルに拡張することは可能である。また、本稿ではラグ次数を1とし誤差項 ε_t の分布に正規分布を仮定して分析を行っているが、ラグ次数を2以上にすることや、 ε_t の分布を正規分布以外の分布にすることも可能である。

3) ここでは、景気には拡張期と後退期の2状態しかないものと仮定するが、3状態以上ある場合への拡張も可能である。

$$\begin{aligned}\pi(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) &= p_{11}, & \pi(S_t = 0 | S_{t-1} = 1) &= 1 - p_{11}, \\ \pi(S_t = 0 | S_{t-1} = 0) &= p_{00}, & \pi(S_t = 1 | S_{t-1} = 0) &= 1 - p_{00}\end{aligned}\quad (13.4)$$

たとえば、 p_{11} は、 $t-1$ 期が景気拡張期であるときに t 期も景気拡張期のままである確率を表しており、 p_{00} は、 $t-1$ 期が景気後退期であるときに t 期も景気後退期のままである確率を表している。マルコフ過程なので、これらの確率はすべて 1 期前の景気の状態 S_{t-1} のみに依存する。さらに、これらの確率はすべて時間を通じて一定であると仮定する。この遷移確率を行列表現すると、以下のようになる。

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 1 - p_{00} \\ 1 - p_{11} & p_{00} \end{bmatrix} \quad (13.5)$$

この MS モデルを複数の構造変化点を付加したモデルに拡張する。本稿の分析では、構造変化によって、景気後退期の平均成長率 $\mu^{(0)}$ と景気拡張期の平均成長率 $\mu^{(1)}$ の値のみが変化すると仮定する。そこで、 $\mu^{(0)}$ と $\mu^{(1)}$ に添え字 t を付けることにより、まず (13.1)、(13.2) 式を次のように書き換える。

$$y_t = \mu_t + \phi(y_{t-i} - \mu_{t-i}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d.N(0, \sigma^2), \quad (13.1)'$$

$$\mu_t = \mu_t^{(0)}(1 - S_t) + \mu_t^{(1)}S_t, \quad \mu_t^{(0)} < \mu_t^{(1)}. \quad (13.2)'$$

Kim and Nelson[1999a]や渡部・飯星[2007]では、誤差項の分散 σ^2 も構造変化により値が変化すると仮定しており、そうした仮定の下でも分析を行ったが、 σ^2 の値の変化は観測されなかったので、以下では景気後退期と拡張期の平均成長率 $\mu^{(0)}$ 、 $\mu^{(1)}$ の値のみが変化すると仮定した場合の結果を報告する。

次に、各期においてその期までに何回構造変化が起きているか表すために、変数 D_t を導入する。以下、 y_t の標本の大きさを T 、構造変化点の数を n とする。さらに、構造変化点を (τ_1, \dots, τ_n) で表し、 $1 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n \leq T$ を満たすものとする。そうすると、 D_t は以下のように定義される。

$$D_t = \begin{cases} 0, & 1 \leq t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \vdots & \\ i, & \tau_i \leq t < \tau_{i+1} \\ \vdots & \\ n-1, & \tau_{n-1} \leq t < \tau_n \\ n, & \tau_n \leq t \leq T \end{cases} \quad (13.6)$$

$$D_1 = 0, \quad D_T = n.$$

(13.6) 式の示すとおり、最初の構造変化が生じる前は D_t は 0 であり、最初の構造変化が起きた後には D_t は 1 となり、同様に、構造変化が起きるたびに D_t の値は 1 つずつ大きくなり、最後の n 個目の構造変化の後には D_t は n となる。構造変化点の数が n になるように、 D_1 と D_T はそれぞれ 0 と n に固定する。また、この D_t は上で説明した景気が拡張期か後退期かを表すダミー変数 S_t と独立であると仮定する。

パラメーターの構造変化を容易に表現するために、さらに上記 D_t に対応するダミー変数 $d_{it}(i=0, \dots, n; t=1, \dots, T)$ を導入する。この d_{it} は各期ごとに $n+1$ 個、すなわち、全部で $(n+1)T$ 個あり、各々の d_{it} の値は以下のように定義される。

$$d_{it} = \begin{cases} 1, & D_t = i \\ 0, & D_t \neq i \end{cases} \quad (13.7)$$

たとえば、 t 期までに 2 回の構造変化が起きているとすると d_{2t} が 1 となり、それ以外の $d_{0t}, d_{1t}, d_{3t}, \dots, d_{nt}$ はすべて 0 となる。このダミー変数 d_{it} を使うことによって、構造変化によって値の変わる 2 つのパラメータ、景気後退期の平均成長率 $\mu_t^{(0)}$ と景気拡張期の平均成長率 $\mu_t^{(1)}$ を、それぞれ以下のように表すことができる。

$$\mu_t^{(0)} = m_{00}d_{0t} + \dots + m_{0n}d_{nt}, \quad (13.8)$$

$$\mu_t^{(1)} = m_{10}d_{0t} + \dots + m_{1n}d_{nt}, \quad (13.9)$$

$$m_{00} < m_{10}, \dots, m_{0n} < m_{1n}.$$

このように定式化すると、 m_{0i} 、 m_{1i} はそれぞれ、構造変化点 τ_i と τ_{i+1} の間の景気後退期と拡張期の平均成長率を表すことになる。すべての期で景気後退期よりも拡張期の方が平均成長率が高くなるように、 $m_{00} < m_{10}, \dots, m_{0n} < m_{1n}$ という制約を置く。

本稿の分析では、Chib [1998] や渡部・飯星 [2007] に従い、それまでに何回構造変化があったかを表す変数 D_t も、 S_t と同様、マルコフ過程に従うものと仮定する。ただし、通常マルコフ過程ではなく、現行の値にとどまるか、あるいは1増えるかどちらかで、値が減ったり、一度に2以上増えることはないものとする。これを遷移確率で表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} \pi[D_t=0|D_{t-1}=0] &= q_{00}, & \pi[D_t=1|D_{t-1}=0] &= 1-q_{00}, \\ \pi[D_t=1|D_{t-1}=1] &= q_{11}, & \pi[D_t=2|D_{t-1}=1] &= 1-q_{11}, \\ & \vdots & & \\ \pi[D_t=n-1|D_{t-1}=n-1] &= q_{n-1,n-1}, & \pi[D_t=n|D_{t-1}=n-1] &= 1-q_{n-1,n-1}, \\ \pi[D_t=n|D_{t-1}=n] &= 1. \end{aligned} \tag{13.10}$$

たとえば、 q_{00} は、 $t-1$ 期まで1度も構造変化が生じていないときに t 期も構造変化が生じない確率を表しており、 q_{11} は、 $t-1$ 期にすでに1回構造変化が生じているときに t 期に新たな構造変化が生じない確率を表している。この遷移確率を行列表現したものが次式である。

$$Q = \begin{bmatrix} q_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-q_{00} & q_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-q_{11} & q_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-q_{n-1,n-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{13.11}$$

(13.11) 式の遷移行列は、(13.5) 式の遷移行列と異なり、各状態の遷移が非可逆的であり、一度次の状態に遷移したら元に戻ることがないことを示している。たとえば、今期が $D_t=2$ である3行3列目の q_{22} に注目すると、この q_{22} は来期も $D_{t+1}=2$ に留まる確率であり、その下の $1-q_{22}$ は来期構造

変化が起こり $D_{t+1}=3$ になる確率である。3 列目の他の値がすべて 0 になっていることからわかるように、 $D_{t+1}=1$ になったり、 $D_{t+1}=4$ になる確率は 0 である。

本稿では、この (13.1)', (13.2)', (13.3), (13.4), (13.6)-(13.10) 式から成る複数の構造変化点をもつ MS モデルを用いて日本の景気循環の構造変化について分析する。分析方法に MCMC を用いたベイズ推定を採用することにより、パラメータだけでなく、景気の転換点や構造変化点も同時推定する。また、事後オッズ比を用いて構造変化点の数の選択も行う。次節ではこうした計量的手法について説明する。

3 ベイズ推定法とモデル選択

3.1 ギブス・サンプラーを用いたベイズ推定

以下、データを $\tilde{Y}_T=(y_1, \dots, y_T)$, 推定する未知パラメータ・ベクトルを $\tilde{\theta}$ とする。ベイズ推定法では、まず、未知パラメータ $\tilde{\theta}$ にデータを観測する前の分布である事前分布 $\pi(\tilde{\theta})$ を設定する。従来のベイズ推定法は、事前分布をベイズの定理

$$\pi(\tilde{\theta} | \tilde{Y}_T) = \frac{\pi(\tilde{\theta})\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{\theta})}{\pi(\tilde{Y}_T)} \quad (13.12)$$

によってデータ \tilde{Y}_T を観測した後の事後分布 $\pi(\tilde{\theta} | \tilde{Y}_T)$ に更新し、得られた事後分布に基づいてパラメータの値を推定するというものであった。前節で説明した複数の構造変化点を付加した MS モデルにおいて、(13.12) 式を用いて事後分布を計算しようとするとは煩雑な手法を採らなければならない。そうした場合には、MCMC によって事後分布から未知パラメータ $\tilde{\theta}$ の値をサンプリングし、得られた値に基づいてパラメータの値を推定するという方法が用いられる。MCMC とは、通常のランダム・サンプリングと異なり、1 回前にサンプリングされた値に依存させて次の値をサンプリングする方法の総称であり、代表的なものにギブス・サンプラーとメトロポリス・ヘイスティングス (MH) アルゴリズムがある⁴⁾。

本稿の推定ではギブス・サンプラーを用いるので、以下、ギブス・サンプ

ラーについて説明する. ギブス・サンプラーを使う場合には, 未知パラメータ $\tilde{\theta}$ をいくつかのブロック $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ に分割する. $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ はそれぞれ 1 変量であっても多変量であっても構わないが, 各ブロックの全条件付事後分布 (Full Conditional Posterior Distribution) $\pi(\theta_i | \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_k, \tilde{Y}_T)$ ($i=1, \dots, k$) は, 基準化定数 (Normalizing Constant) 以外はすべて解析的に求められ, かつ, そこからサンプリングできるものとする. このとき, 適当な初期値 $(\theta_2^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})$ からスタートして, まず, 全条件付事後分布 $\pi(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, \tilde{Y}_T)$ から $\theta_1^{(1)}$ をサンプリングし, 次に, 全条件付事後分布 $\pi(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, \theta_3^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)}, \tilde{Y}_T)$ から $\theta_2^{(1)}$ をサンプリングする. これを繰り返す. 最後に $\pi(\theta_k | \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{k-1}^{(1)}, \tilde{Y}_T)$ から $\theta_k^{(1)}$ をサンプリングする. 以上を第 1 ループと呼ぶことにする. この第 1 ループでサンプリングされた $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_k^{(1)})$ からスタートして, 同様に第 2 ループを行い, $(\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \dots, \theta_k^{(2)})$ をサンプリングする. 以上を繰り返すと, 第 l ループでは, $(\theta_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}, \dots, \theta_k^{(l)})$ がサンプリングされることになる. 緩い制約条件の下で, $l \rightarrow \infty$ とすると, 以上のようにしてサンプリングされた $(\theta_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}, \dots, \theta_k^{(l)})$ は同時事後分布 $\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | \tilde{Y}_T)$ からサンプリングされた確率変数に分布収束することが知られている⁵⁾.

そこで, 最初の M ループ (M は十分大きな値とする) でサンプリングされた値を捨て (この捨てる最初の M ループのことを “burn-in” と呼ぶ), さらに N ループを行ってサンプリングされた $(\theta_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}, \dots, \theta_k^{(l)})$ ($l=M+1, M+2, \dots, M+N$) を, 同時事後分布 $\pi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k | \tilde{Y}_T)$ からサンプリングされた値と見なし, 推定に用いる. たとえば, θ_1 の平均はサンプリングされた値の標本平均として次のように推定できる.

$$E(\theta_1) \approx \frac{1}{N} \sum_{l=M+1}^{M+N} \theta_1^{(l)}$$

前節で説明した複数の構造変化点を付加した MS モデルでは, 未知パラメータは $\tilde{\theta} = (\bar{m}, \phi, \sigma^2, \tilde{p}, \tilde{q})$ である. ただし, $\bar{m} = [m_{01}, \dots, m_{0n}, m_{11}, \dots, m_{1n}]'$, $\tilde{p} = [p_{00}, p_{11}]'$, $\tilde{q} = [q_{00}, \dots, q_{n-1}, n-1]'$. このモデルにギブス・サン

4) 詳しくは, 大森[2001], 中妻[2007], 和合[2005]第 2 章を参照のこと.

5) 詳しくは, 大森[2001]の第 7 節を参照のこと.

プラーを応用する場合には、さらに潜在変数である $\tilde{D}_T = [D_1, \dots, D_T]$, $\tilde{S}_T = [S_1, \dots, S_T]$ もパラメータと一緒にサンプリングを行う。具体的には、以下の7つの全条件付事後分布から繰り返しサンプリングを行う。

- ステップ 1. $\pi[\tilde{m} | \tilde{\theta}_{-\tilde{m}}, \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T]$
- ステップ 2. $\pi[\phi | \tilde{\theta}_{-\phi}, \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T]$
- ステップ 3. $\pi[\sigma^2 | \tilde{\theta}_{-\sigma^2}, \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T]$
- ステップ 4. $\pi[\tilde{S}_T | \tilde{\theta}, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T]$
- ステップ 5. $\pi[\tilde{D}_T | \tilde{\theta}, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T]$
- ステップ 6. $\pi[\tilde{p} | \tilde{S}_T]$
- ステップ 7. $\pi[\tilde{q} | \tilde{D}_T]$

ここで、たとえば、 $\tilde{\theta}_{-\tilde{m}}$ は $\tilde{\theta}$ に含まれる \tilde{m} 以外のすべてのパラメータを意味する。ステップ 6 と 7 で条件のなかにそれぞれ \tilde{S}_T と \tilde{D}_T しかないのは、それらが与えられると、 \tilde{p} と \tilde{q} が他のパラメータや \tilde{Y}_T と独立になるからである。なお、各ステップの全条件付事後分布およびそこからのサンプリング法については補論 1 に記したので、そちらを参照のこと。以上のステップ 1 から 7 までの全条件付事後分布からのサンプリングを繰り返せば、同時事後分布

$$\pi(\tilde{m}, \phi, \sigma^2, \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{p}, \tilde{q} | \tilde{Y}_T) \quad (13.13)$$

からサンプリングした確率変数に分布収束するので、最初の何回かを burn-in として捨てて、残りのサンプルを使ってパラメータの推定を行えばよい。

ただし、その前に burn-in 以降のサンプルが同時事後分布 (13.13) からサンプリングされた確率変数に分布収束しているかどうか確かめる必要がある。本稿では、そうした収束診断の方法として、Geweke[1992]によって提案された方法を用いる⁶⁾。この方法は、burn-in 以降の各パラメータの N 個のサンプルを前半と後半に分け、平均に有意な差がないかどうか検定するのである⁷⁾。具体的には、 N 個のサンプルの内、最初の n_A 個のサンプルの平均

6) 他の方法については、大森[2001]の第 6 節を参照のこと。

7) ただし、平均に差がないことは収束の必要条件であって十分条件ではない。

$$\bar{\theta}_A = \left(\frac{1}{n_A} \right) \sum_{j=1}^{n_A} \theta^{(j)}$$

と最後の n_B 個のサンプルの平均

$$\bar{\theta}_B = \left(\frac{1}{n_B} \right) \sum_{j=N-n_B+1}^N \theta^{(j)}$$

を用いて、次のような収束診断 (Covergence Diagnostic; CD) 統計量を計算する.

$$\text{CD} = \frac{\bar{\theta}_A - \bar{\theta}_B}{\sqrt{\hat{\sigma}_A^2/n_A + \hat{\sigma}_B^2/n_B}} \quad (13.14)$$

ただし、 $\hat{\sigma}_A^2/n_A$ と $\hat{\sigma}_B^2/n_B$ は、それぞれ $\bar{\theta}_A$ と $\bar{\theta}_B$ の分散の推定量である. もしギブス・サンプラーが収束していれば、CD統計量は漸近的に標準正規分布に従う. このCD統計量を計算する上で注意しなくてはならないのは、MCMCはランダム・サンプリングではないので、サンプリングされた値に自己相関が生じることである. そこで、 $\hat{\sigma}_A^2$ 、 $\hat{\sigma}_B^2$ は自己相関を考慮して計算する必要がある. 自己相関のあるサンプル $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(n)}\}$ の標本平均の分散の推定値は以下の式から計算できる.

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\Gamma}(0) + \frac{2n}{n-1} \sum_{i=1}^B K\left(\frac{i}{B}\right) \hat{\Gamma}(i). \quad (13.15)$$

ただし、

$$\hat{\Gamma}(i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i+1}^n (\theta^{(k)} - \bar{\theta})(\theta^{(k-i)} - \bar{\theta}),$$

である $K(\cdot)$ にパルツェン・ウインドーを採用する⁸⁾. B はそのバンド幅を表す.

8) Shephard and Pitt[1997]を参照のこと.

3.2 事後オッズ比によるモデル選択法

ベイズ統計学では通常事後オッズ比を用いてモデル選択を行う。モデル M_k と M_l の間の選択を行う場合、データ \tilde{Y}_T が与えられた下でのそれぞれのモデルが正しい確率の比率 $\pi(M_k|\tilde{Y}_T)/\pi(M_l|\tilde{Y}_T)$ を事後オッズ比と呼ぶ。これが1よりも大きければ M_k を選択し、1よりも小さければ M_l を選択する。

事後オッズ比は次のように表すことができる。

$$\frac{\pi(M_k|\tilde{Y}_T)}{\pi(M_l|\tilde{Y}_T)} = \frac{\pi(M_k)}{\pi(M_l)} \cdot \frac{\pi(\tilde{Y}_T|M_k)}{\pi(\tilde{Y}_T|M_l)} \quad (13.16)$$

ここで、右辺第1項 $\pi(M_k)/\pi(M_l)$ は事前オッズ比と呼ばれ、データを観測する前のそれぞれのモデルが正しい確率の比率である。また、右辺第2項 $\pi(\tilde{Y}_T|M_k)/\pi(\tilde{Y}_T|M_l)$ はベイズ・ファクターと呼ばれる。どちらのモデルが正しいか事前情報がない場合には、事前オッズ比は1に設定される。そうすると、事後オッズ比はベイズ・ファクターと等しくなり、ベイズ・ファクターの分子、分母を計算すれば事後オッズ比が求まることになる。

ベイズ・ファクターの分子、分母はそれぞれ周辺尤度と呼ばれる。本稿では、それを Chib[1995]の方法を用いて計算する⁹⁾。この方法についての詳細は補論2に記したので、そちらを参照のこと。

4 構造変化点と景気転換点の推定結果

本節では、上記のモデルと分析方法を用いて、最近の25年間の日本の景気循環において、構造変化があったのかどうか、もしあったなら、その構造変化点の数はいくつで、それぞれいつどのような変化があったのかを検証する。さらに、構造変化点を考慮することが、景気転換点の推定に対してどのような影響を及ぼすのかについても検討する。そのために、4種類のMSモデルを推定する。この4種類とは、構造変化点を持たない通常のMSモデルと構造変化点が1つのMSモデル、2つのMSモデル、および3つのMSモデルである。推定後、各MSモデルの周辺尤度を計算することでモデル選択

9) 周辺尤度の他の計算方法については、大森[2001]の第8.2節を参照のこと。

を行い、選択された MS モデルに基づいて構造変化点の数と時期を特定化する。

日本の景気を表す変数として用いるのは、内閣府経済社会研究所が 11 個の景気一致系列を使って作成している景気一致指数である。標本期間は 1984 年 1 月から 2007 年 12 月までであり、データ数は 300 である。図表 13-1 にこのデータをプロットしてある。この指数を自然対数化して 1 階の階差をとり、さらに 100 倍することにより % 表示にしたものを y_t として用いた。図表 13-1 の影の部分は内閣府経済社会総合研究所が公表している景気基準日付に基づく景気後退期である。ただし、最後の景気後退期の開始時点、すなわち最後の景気の山は 2007 年 10 月になっているが、これは 2009 年 1 月 29 日に公表された暫定的な日付である。

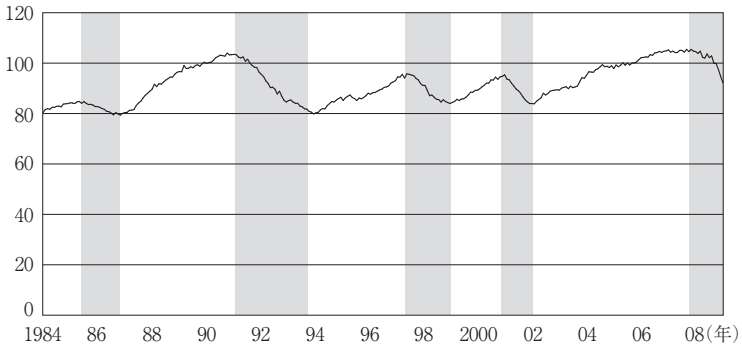
各パラメータの事前分布には、通常自然共役な事前分布を設定した。詳細は、補論 1 もしくは図表 13-4 の注を参照のこと。全推定で、burn-in を 5,000 回とし、その後の 10,000 回のサンプルを事後分布からサンプリングされたものと見なして推定に用いた。

図表 13-2 には、各モデルの対数周辺尤度の値が記されている。それによると構造変化点が 2 つのモデルの対数周辺尤度が最も高くなっている。このことから、事前オッズ比が 1 の場合、構造変化点の数は 2 が選択されることがわかる。この結果から、最近の 25 年間の日本の景気循環における構造変化点の数は 2 であると結論づけることができる。

図表 13-3 には、構造変化点 2 つの MS モデルから推定された各構造変化点の事後分布を描いている。細い線が第 1 構造変化点、太い線が第 2 構造変化点の事後分布を表している。これらは、 \tilde{D}_T の burn-in 以降の 10,000 回のサンプルそれぞれで、 $D_{t-1} < D_t$ となっている t が 2 箇所あるので、それらを抽出して、それぞれのヒストグラムを描いたものである。第 1 構造変化点の事後分布のピークは 1991 年 8 月であり、第 2 構造変化点の事後分布のピークは 2004 年 8 月である。

図表 13-4 は、構造変化点 2 つの MS モデルのパラメータの推定結果である。そこには、burn-in 以降の 10,000 個のサンプルを使って計算されたパラメータの事後分布の平均、標準偏差、95% 信用区間 (credible interval)¹⁰⁾、CD 統計量が計算されている。平均と標準偏差はそれぞれ各パラ

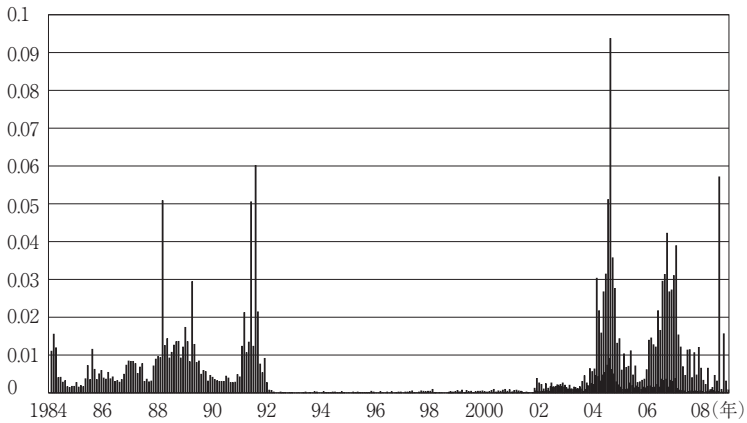
図表 13-1 景気一致指数



図表 13-2 対数周辺尤度

構造変化点の数	対数周辺尤度	構造変化点の数	対数周辺尤度
0	-369.899	2	-357.264
1	-358.088	3	-357.810

図表 13-3 構造変化点の数を 2 とした場合の構造変化点の事後確率



10) ベイズ統計学では「信頼区間」ではなく、「信用区間」という言葉を用いることが多い。鈴木 [1978] 参照。

図表 13-4 構造変化点 2 つの MS モデルの推定結果

パラメーター	事前分布		事後分布			
	平均	標準偏差	平均	標準偏差	95%信用区間	CD
ϕ	0	1	-0.293	0.062	[-0.394, -0.192]	0.912
m_{00}	-0.5	1	-0.329	0.383	[-0.835, 0.131]	-0.302
m_{01}	-0.5	1	-0.782	0.326	[-1.073, -0.084]	1.467
m_{02}	-0.5	1	-2.069	0.317	[-2.633, -1.581]	0.820
m_{10}	0.5	1	0.603	0.269	[0.260, 1.095]	-0.459
m_{11}	0.5	1	0.430	0.176	[0.154, 0.582]	0.416
m_{12}	0.5	1	0.051	0.345	[-0.336, 0.324]	0.532
σ^2	1	1	0.521	0.050	[0.4445, 0.607]	-0.020
ρ_{00}	0.9	0.090	0.928	0.031	[0.872, 0.971]	1.392
ρ_{11}	0.9	0.090	0.962	0.016	[0.933, 0.983]	-0.955
q_{11}	0.989	0.033	0.980	0.032	[0.931, 0.999]	2.292
q_{22}	0.989	0.033	0.989	0.025	[0.959, 1.000]	-0.479

- 注) 1. 表にある記号は, (13-1)', (13-2)', (13-4), (13-8)-(13-11) 式のものである.
 2. CD は (13-14) 式で定義される Geweke [1992] の収束診断 (CD) 統計量を表す.
 3. 各パラメーターの事前分布は以下のとおり.
 $\phi \sim N((0, 0)', I_2)I[|\phi| < 1]$, $\bar{M}_i = [m_{0i}, m_{1i}]' \sim N((-0.5, 0.5)', I_2)I[m_{0i} < m_{1i}] (i=0, 1, 2)$,
 $1/\sigma^2 \sim G(3, 2)$, $\rho_{00} \sim \text{Beta}(9, 1)$, $\rho_{11} \sim \text{Beta}(9, 1)$, $q_{11} \sim \text{Beta}(9, 0.1)$, $q_{22} \sim \text{Beta}(9, 0.1)$.
 ここで, I_a は $a \times a$ の単位行列, $N(\dots, \dots)$ は正規分布, $G(\dots, \dots)$ はガンマ分布, $\text{Beta}(\dots, \dots)$ はベータ分布を表す. また, $I[|\phi| < 1]$, $I[m_{0i} < m_{1i}]$ は括弧のなかの不等式がすべて満たされれば 1, そうでなければ 0 となる指示関数である.
 4. ϕ , m_{0i} , $m_{1i} (i=0, 1, 2)$ の事前分布の平均および標準偏差には, 切断する前の正規分布の平均と分散が示されている.

メータの 10,000 個のサンプルの平均と標準偏差として計算した. 95%信用区間は, サンプルを大きさの順に並べ替え, 下 2.5%点と上 2.5%点を抽出することで導出した. CD 統計量は $N=10,000$, $n_A=1,000$, $n_B=5,000$ として (13.14) 式を用いて計算した. その際, $\hat{\sigma}_A^2$ および $\hat{\sigma}_B^2$ は (13.15) 式を用いて計算し, パルツェン・ウインドーのバンド幅 B はそれぞれ 100 および 500 に設定した. 図表 13-4 の CD の値からわかるように, ギブス・サンプラーが収束しているという帰無仮説は, すべてのパラメータにおいて, 有意水準 1% では受容されている¹¹⁾. m_{00} と m_{01} の事後平均, m_{10} と m_{11} の事後平均を比較すると, 第 1 構造変化点では, 景気拡張期, 後退期ともに平均成長率が低下していることがわかる. また, m_{01} と m_{02} の事後平均, m_{11} と m_{12} の事後平均を比較すると, 第 2 構造変化点では, それらがさらに

11) 構造変化点 0, 1, 3 の MS モデルでも同様に受容されている.

低下していることがわかる¹²⁾。

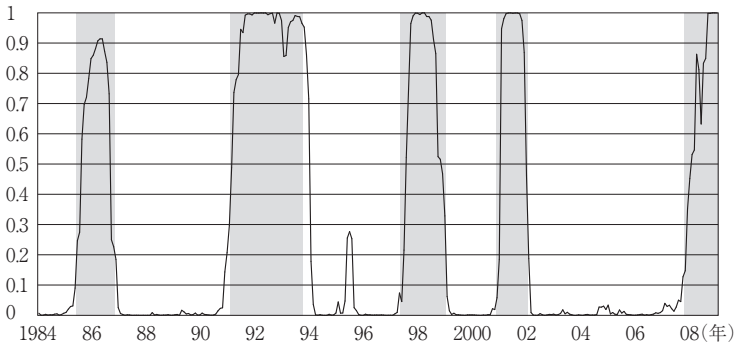
以上の結果は次のようにまとめられる。(1)日本の過去25年における景気循環における構造変化点の数は2である。(2)変化点はそれぞれバブル崩壊後の1991年8月と、それまでの景気回復のスピードが減速した2004年8月である可能性が最も高い。(3)いずれの構造変化も、景気拡張期、後退期ともに景気の平均成長率を低下させている。

次に、構造変化を考慮するのとならないのと、景気転換点の推定値がどのように影響を受けるかを分析する。図表13-5には構造変化点0, 1, 2, 3のそれぞれのMSモデルから推定された各期が景気後退期である事後確率が描かれている。これは、 S_t の事後平均 S_t^* を使って、 $(1-S_t^*)$ として計算している。図表13-5の影の部分は内閣府経済社会総合研究所が公表している景気基準日付から割り出された景気後退期である。さらに図表13-6は、4種類のMSモデルから推定された各景気転換点それぞれ内閣府の景気基準日付と何日ずれているかを記したものである。正の数値は基準日付に対してMSモデルによる推定値が遅れていることを表し、負の数値は先行していることを表す。なお、景気の山の日付は、景気後退期の確率が50%を切った時点とし、景気の谷の日付は景気後退期の確率が50%を越えた時点とした。内閣府が暫定的に最後の景気の山としている2007年10月以外は、いずれのモデルもずれは±3カ月以内に収まっている。2007年10月に関しては、構造変化を考えない通常のMSモデルでは3カ月遅れであるのに対して、構造変化点を付加したモデルでは、すべて10カ月遅れとなっている。図表13-3からわかるように、構造変化点の数を2とすると、最後の景気拡張期の平均変化率 m_{12} の事後平均が0.051とほぼ0になっているのに対して、景気拡張期の平均変化率 m_{12} が-2.069と落ち込んでいる。内閣府が暫定的に景気の山としている2007年10月以降、景気一致指数は下落しているが、しばらく下落のスピードが緩やかだったために、その時期も景気拡張期と見なし、内閣府の日付よりも10カ月遅れたものと解釈できる。

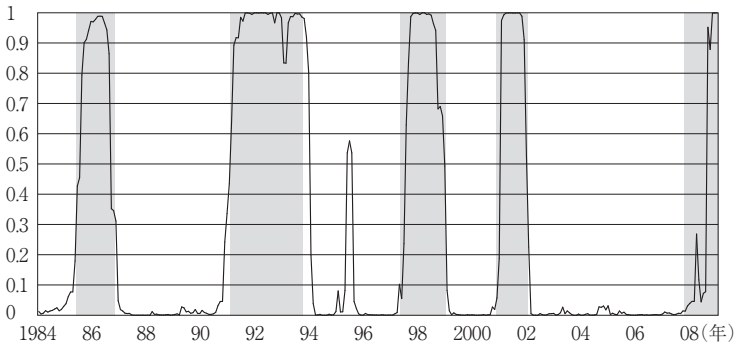
12) その他のパラメータに関しては、事後平均および95%信用区間から、 ϕ は負であることがわかる。内閣府の景気一致指数の変化率が負の自己相関を持つことはよく知られており、これは景気一致指数を構成する11のほとんどの景気一致系列の変化率が負の自己相関をもっているからである (Fukuda and Onodera[2001], Watanabe[2003])。

図表 13-5 景気後退期の事後確率 (その1)

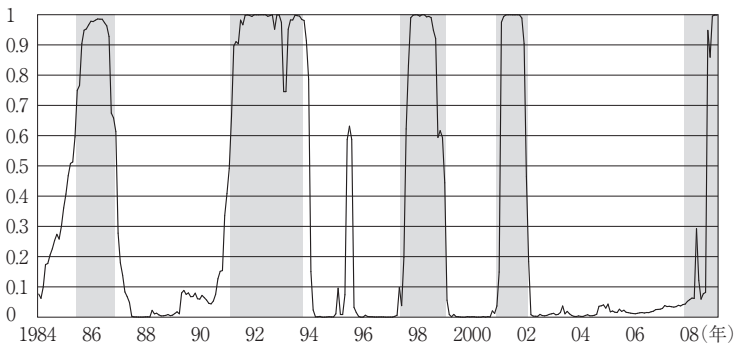
(a) 構造変化点の数が0の場合



(b) 構造変化点の数が1の場合

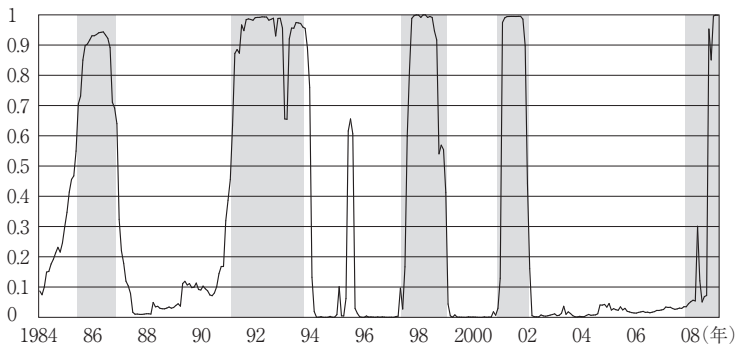


(c) 構造変化点の数が2の場合



図表 13-5 景気後退期の事後確率（その 2）

(d) 構造変化点の数が 4 の場合



図表 13-6 景気転換点のずれ

景気基準日付	構造変化点の数				景気基準日付	構造変化点の数			
	0	1	2	3		0	1	2	3
	山					谷			
85/6	+2	+2	-3	-1	86/11	-2	+3	-2	-1
91/2	+1	0	0	0	93/10	-2	+3	-1	0
97/5	+2	+2	+2	+2	99/1	+1	+3	-1	-1
00/10	+2	+2	+2	+2	02/1	+1	+3	-1	-1
07/10	+3	+10	+10	+10					

- 注) 1. 正の数字は、基準日付に対して MS モデルによる推定値が遅れていることを表し、負の数字は先行していることを表す。
 2. 景気の上の日の付は、景気後退期の確率が 50% を切った時点とし、景気の下の日付は景気後退期の確率が 50% を越えた時点とする。

5 結論

本稿では、複数の構造変化点を付加した MS モデルを MCMC を用いてベイズ分析することにより、1984 年から 2008 年までの 15 年間にわたる CI のデータから日本の景気循環の転換点と構造変化点を同時推定した。また、構造変化点の数の異なるモデルのなかから事後オッズ比によってモデル選択を行うことで、構造変化点の数と時期について特定化した。その結果、日本の景気循環における構造変化点は 2 箇所あり、バブル崩壊後の 1991 年 8 月とそれまでの景気上昇が減速した 2004 年 8 月であること、いずれの構造変化も景気の前平均成長率を下降させたことが明らかになった。

補論

1 事前分布と全条件付事後分布

各パラメータの事前分布および第 3.1 項のステップ 1.-7. の全条件付事後分布は以下のとおりである. 全条件付事後分布の導出方法について詳しくは, Kim and Nelson[1999b]の Chapter 9 や Watanabe[2003]の Appendix 1 を参照のこと. ただし, 尤度は, 厳密には, $\pi(y_1, \dots, y_T|\bar{\theta})$ であるが, 簡単化のため, ここではそれを $\pi(y_2, \dots, y_T|y_1, \bar{\theta})$ で近似して, 以下の全条件付事後分布や周辺尤度を計算している.

ステップ 1. 平均成長率のベクトル

$$\tilde{M}_i = [m_{0i}, m_{1i}]' \quad (i = 1, \dots, n)$$

の事前分布には以下のように互いに独立な 2 変量切断正規分布を仮定する.

$$\tilde{M}_i \sim N(M_{i0}, \Sigma_{M_{i0}})I(m_{0i} < m_{1i}).$$

ここで, $I(m_{0i} < m_{1i})$ は括弧内の不等式が満たされれば 1, そうでなければ 0 となる指示関数 (indicator function) であり, したがって, この事前分布は平均 M_{i0} , 分散共分散行列 $\Sigma_{M_{i0}}$ の 2 変量正規分布を $m_{0i} < m_{1i}$ の範囲だけ残して切断した切断正規分布になっている.

この事前分布の下では, $\tilde{M}_i (i = 1, \dots, n)$ の全条件付事後分布も以下のような互いに独立な 2 変量切断正規分布になる.

$$\tilde{M}_i | \tilde{S}_T, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T \sim N(M_{i1}, \Sigma_{M_{i1}})I(m_{0i} < m_{1i}). \quad (13.17)$$

ただし,

$$Y^* = [(y_{\tau_i} - \phi y_{\tau_i-1})/\sigma, \dots, (y_{\tau_{i+1}-1} - \phi y_{\tau_{i+1}-2})/\sigma]$$

$$X^* = \begin{bmatrix} \{(1 - S_{\tau_i}) - \phi(1 - S_{\tau_i-1})\}/\sigma, & (S_{\tau_i} - \phi S_{\tau_i-1})/\sigma \\ \vdots & \vdots \\ \{(1 - S_{\tau_{i+1}-1}) - \phi(1 - S_{\tau_{i+1}-2})\}/\sigma, & (S_{\tau_{i+1}-1} - \phi S_{\tau_{i+1}-2})/\sigma \end{bmatrix}$$

と定義すると,

$$\sum_{M_{i1}} = \left(\sum_{M_{i0}}^{-1} + X^{*'} X^* \right)^{-1}, \quad M_{i1} = \sum_{M_{i0}} \left(\sum_{M_{i0}}^{-1} M_{i0} + X^{*'} Y^* \right).$$

この分布からサンプリングするには、まず平均 M_{i1} 、分散 $\sum_{M_{i1}}$ の 2 変量正規分布からサンプリングし、サンプリングされた値が $m_{0i} < m_{1i}$ を満たさない場合には、それを捨てて新たにサンプリングすればよい。

ステップ 2. ϕ の事前分布には次のような切断正規分布を仮定する。

$$\phi \sim N(\phi_0, \sigma_{\phi_0}^2) I(|\phi| < 1).$$

ここで、 $I(|\phi| < 1)$ は、 $|\phi| < 1$ であれば 1 を、それ以外では 0 になる指示関数である。すなわち、この事前分布は平均 ϕ_0 、分散 $\sigma_{\phi_0}^2$ の正規分布を定常性を満たす範囲だけ残して切断した切断正規分布である。

この事前分布の下で、 ϕ の全条件付事後分布はやはり次のように切断正規分布になる。

$$\phi | \bar{\theta}_{-\phi}, \bar{S}_T, \bar{D}_T, \bar{Y}_T \sim N(\phi_1, \sigma_{\phi_1}^2) I(|\phi| < 1). \quad (13.18)$$

ただし、

$$Y^* = [(y_2 - \mu_2)/\sigma, \dots, (y_T - \mu_T)/\sigma]$$

$$X^* = [(y_1 - \mu_1)/\sigma, \dots, (y_{T-1} - \mu_{T-1})/\sigma]$$

と定義すると、

$$\sigma_{\phi_1}^2 = (\sigma_{\phi_0}^{-2} + X^{*'} X^*)^{-1}, \quad \phi_1 = \sigma_{\phi_1}^2 (\sigma_{\phi_0}^{-2} \phi_0 + X^{*'} Y^*).$$

この分布からサンプリングするには、まず平均 ϕ_1 、分散 $\sigma_{\phi_1}^2$ の正規分布からサンプリングし、サンプリングされた値が定常性を満たさない場合には、それを捨てて新たにサンプリングすればよい。

ステップ 3. σ^2 の事前分布には次のような逆ガンマ分布を仮定する。

$$\sigma^2 \sim IG\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\delta_0}{2}\right)$$

この事前分布の下では、全条件付事後分布も次のような逆ガンマ分布になる。

$$\sigma^2 | \tilde{\theta}_{-\sigma^2}, S_T, D_T, \tilde{Y}_T \sim IG\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\delta_1}{2}\right). \quad (13.19)$$

ただし、

$$\nu_1 = \nu_0 + T, \quad \delta_1 = \delta_0 + \sum_{t=1}^T [y_t - \mu_t - \phi_t(y_{t-1} - \mu_{t-1})]^2.$$

この分布からサンプリングするには、ガンマ分布からサンプリングし、その逆数をとればよい¹³⁾。

ステップ 4. \tilde{S}_T のサンプリングには、Kim and Nelson[1998, 1999b]で提案されている Multi-move sampler を用いる¹⁴⁾。いま、 $\tilde{S}^{t+1} = [S_{t+1}, \dots, S_T]$ とおくと、 \tilde{S}_T の全条件付事後分布は以下の式 (13.20) のように表現できる。

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{S}_T | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) &= \pi(S_T | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \cdots \\ &\pi(S_t | \tilde{S}^{t+1}, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \cdots \pi(S_1 | \tilde{S}^2, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}). \end{aligned} \quad (13.20)$$

そこで、左辺の分布から \tilde{S}_T をサンプリングするためには、まず右辺第1項 $\pi(S_T | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta})$ から S_T をサンプリングし、そこでサンプリングされた S_T の値を条件として、右辺第2項 $\pi(S_{T-1} | S_T, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta})$ から S_{T-1} をサンプリングするといったように、時間と逆方向に S_1 まで順々に右辺の各項からサンプリングすればよい。

右辺の各項は次のように表すことができる¹⁵⁾。

$$\begin{aligned} &\pi(S_t = l | S^{t+1}, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \\ &= \frac{\pi(S_t = l | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \pi(S_{t+1} | S_t = l, \tilde{p})}{\sum_{j=0}^1 \pi(S_t = j | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \pi(S_{t+1} | S_t = j, \tilde{p})}, \quad l = 0, 1. \end{aligned} \quad (13.21)$$

13) ガンマ分布からのサンプリング法については、Ripley[1987]を参照のこと。

14) 詳細は、Chib[1996], p. 83 や Kim and Nelson[1999b], p. 213 を参照のこと。

15) Hamilton[1989]のフィルターについては、Kim and Nelson[1999b]の Section 4.2.2 も参照のこと。

ただし,

$$\tilde{Y}_t = [y_1, y_2, \dots, y_t]'$$

この式の右辺の第2項は遷移確率(13.4)式である. 右辺の第1項は, 定常確率

$$\begin{aligned}\pi(S_0 = 1 | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_0, \tilde{\theta}) &= \pi(S_0 = 1 | \tilde{\rho}) = \frac{1 - p_{00}}{2 - p_{00} - p_{11}}, \\ \pi(S_0 = 0 | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_0, \tilde{\theta}) &= \pi(S_0 = 0 | \tilde{\rho}) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{00} - p_{11}},\end{aligned}$$

からスタートして, $t=T$ まで, 時間の順に Hamilton[1989]で提案されているフィルターを実行することで導出できる.

そこで, (13.20) から \tilde{S}_T をサンプリングするためには, 以下の2つのステップを行えばよい.

- (i) まず, $t=1$ からスタートして $t=T$ まで時間の順に Hamilton[1989]のフィルターを実行し, $\pi(S_t | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_t, \tilde{\theta}) (t=1, \dots, T)$ を計算する.
- (ii) 次に, (i)で最後に計算される $\pi(S_T | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta})$ を使って S_T をサンプリングする. 具体的には, 確率 $\pi(S_T=1 | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta})$ で $S_T=1$ をサンプリングし, 残りの確率で $S_T=0$ をサンプリングする. さらに, そこでサンプリングされた S_T と予測・更新ステップから計算された $\pi(S_{T-1} | \tilde{Y}_T, \tilde{D}_T, \tilde{\theta})$ を使って, $\pi(S_{T-1} | S_T, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta})$ から S_{T-1} をサンプリングする. 具体的には, (A5) より,

$$\pi(S_{T-1} = 1 | S_T, \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) = \frac{\pi(S_{T-1} = 1 | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_{T-1}, \tilde{\theta}) \pi(S_T | S_{T-1} = 1, \tilde{\rho})}{\sum_{j=0}^1 \pi(S_{T-1} = j | \tilde{D}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \pi(S_T | S_{T-1} = j, \tilde{\rho})},$$

となるので, この確率で $S_{T-1}=1$ をサンプリングし, 残りの確率で $S_{T-1}=0$ をサンプリングする. これを時間と逆方向に $t=1$ まで繰り返せばよい.

ステップ5. \tilde{D}_T のサンプリングはステップ4の手順と同様,

$$\begin{aligned}\pi(\tilde{D}_T|\tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) &= \pi(D_T|\tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \cdots \\ &\quad \pi(D_t|\tilde{D}^{t+1}, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \cdots \pi(D_1|\tilde{D}^2, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}).\end{aligned}$$

の右辺の各項からのサンプリングを時間と逆方向に行えばよい。ただし、 D_1 と D_T はそれぞれ 0 と n に固定されているので、サンプリングするのは (D_2, \dots, D_{T-1}) である。これは以下の 2 つのステップにより行える。

- (i) まず、 $D_1=0$ からスタートして、 $t=2, \dots, T-1$ の順に Hamilton[1989] のフィルターを実行することにより、 $\pi(D_t|\tilde{Y}_t, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})(t=2, \dots, T-1)$ を計算する。
- (ii) 次に、(i)の最後に計算された $\pi(D_{T-1}|\tilde{Y}_{T-1}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})$ を用いて、次の確率を計算する。

$$\begin{aligned}\pi(D_{T-1}=n|D^T=n, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \\ = \frac{\pi(D_{T-1}=n|\tilde{Y}_{T-1}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})\pi(D_T=n|D_{T-1}=n, \tilde{q})}{\sum_{j=n-1}^n \pi(D_{T-1}=j|\tilde{Y}_{T-1}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})\pi(D_T=n|D_{T-1}=j, \tilde{q})}\end{aligned}$$

ここで、右辺の第 2 項は遷移確率 (13.11) 式である。この確率で $D_{T-2}=D_{T-2}$ をサンプリングし、残りの確率で $D_{T-1}=n-1$ をサンプリングする。そこでサンプリングされた D_{T-1} と上記ステップ(i)で計算された $\pi(D_{T-2}|\tilde{Y}_{T-2}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})$ を用いて、次の確率を計算する。

$$\begin{aligned}\pi(D_{T-2}=D_{T-1}|\tilde{D}^{T-1}, \tilde{S}_T, \tilde{Y}_T, \tilde{\theta}) \\ = \frac{\pi(D_{T-2}=D_{T-1}|\tilde{Y}_{T-2}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})\pi(D_{T-1}|D_{T-2}=D_{T-1}, \tilde{q})}{\sum_{j=D_{T-1}-1}^{D_{T-1}} \pi(D_{T-2}=j|\tilde{Y}_{T-2}, \tilde{S}_T, \tilde{\theta})\pi(D_{T-1}|D_{T-2}=j, \tilde{q})}\end{aligned}$$

この確率で $D_{T-2}=D_{T-2}$ をサンプリングし、残りの確率で $D_{T-2}=D_{T-1}-1$ をサンプリングする。これを時間と逆方向に $t=2$ まで繰り返す。

ステップ 6. 遷移確率 $\tilde{p}=[p_{00}, p_{11}]$ の事前分布には次のような互いに独立なベータ分布を仮定する。

$$p_{00} \sim \text{Beta}(u_{00}, u_{01}), \quad p_{11} \sim \text{Beta}(u_{11}, u_{10})$$

ベータ分布を用いることにより、 p_{00} , p_{11} は必ず 0 から 1 までの値になる。

この事前分布の下では、全条件付事後分布はやはり次のような互いに独立なベータ分布になる。

$$p_{00} | \tilde{S}_T \sim \text{Beta}(u_{00} + n_{00}, u_{01} + n_{01}),$$

$$p_{11} | \tilde{S}_T \sim \text{Beta}(u_{11} + n_{11}, u_{10} + n_{10})$$

ただし、 n_{00} は条件の \tilde{S}_T のなかで $S_t=0$ かつ $S_{t+1}=0$ であった t の個数、 n_{01} は $S_t=0$ かつ $S_{t+1}=1$ であった t の個数であり、 n_{11} 、 n_{10} も同様である。これらはステップ4でサンプリングした \tilde{S}_T から得ることができる。

ステップ7. $\tilde{q} = [q_{00}, \dots, q_{n-1, n-1}]'$ の事前分布にも次のような互いに独立なベータ分布を仮定する。

$$q_{ii} \sim \text{Beta}(r_{ii}, r_{ij}), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

そうすると、全条件付事後分布はやはり次のような互いに独立なベータ分布になる。

$$q_{ii} | \tilde{D}_T \sim \text{Beta}(r_{ii} + m_{ii}, r_{ij} + 1), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

ただし、 m_{ii} は条件の \tilde{D}_T のなかで $D_t=i$ かつ $D_{t+1}=i$ であった t の個数であり、これらはステップ5でサンプリングした \tilde{D}_T から得ることができる。

2 周辺尤度の計算方法

周辺尤度 $\pi(\tilde{Y}_T | M_k)$ はベイズの定理 (13.12) 式の右辺の分母なので、以下のように表される。

$$\pi(\tilde{Y}_T | M_k) = \frac{\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{\theta}, M_k) \pi(\tilde{\theta} | M_k)}{\pi(\tilde{\theta})} \quad (13.22)$$

この式の右辺の尤度関数 $\pi(\tilde{Y}_T | \tilde{\theta}, M_k)$ と事前密度 $\pi(\tilde{\theta} | M_k)$ については比較的簡単に計算できる。以下、 $\tilde{\theta}^*$ をパラメーター $\tilde{\theta}$ の事後平均とすると、まず、 $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^*$ における尤度関数は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} & \pi(\tilde{Y}_T | \tilde{\theta}^*) \\ &= \prod_{t=2}^T \left[\sum_{V_t=1}^{2(n+1)} \cdots \sum_{V_{t-1}=1}^{2(n+1)} \pi(V_t, V_{t-1} | \tilde{Y}_{t-1}, \tilde{\theta}^*) \pi(y_t | \tilde{Y}_{t-1}, V_t, V_{t-1}, \tilde{\theta}^*) \right] \quad (13.23) \end{aligned}$$

ただし、 V_t は以下のように定義される.

$$V_t = \begin{cases} 1, & S_t = 0 \text{ かつ } D_t = 0 \\ 2, & S_t = 0 \text{ かつ } D_t = 1 \\ \vdots & \\ n+1, & S_t = 0 \text{ かつ } D_t = n \\ n+2, & S_t = 1 \text{ かつ } D_t = 0 \\ n+3, & S_t = 1 \text{ かつ } D_t = 1 \\ \vdots & \\ 2(n+1), & S_t = 1 \text{ かつ } D_t = n \end{cases}$$

次に、 $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^*$ における事前密度 $\pi(\tilde{\theta}^*)$ の計算は以下のとおりである. ここでは、事前密度において $\tilde{m}, \phi, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{q}$ は互いに独立であると仮定している. 以下のように、同時事前密度 $\pi(\tilde{\theta}^*)$ はそれぞれのパラメータの事前密度の単なる積になる.

$$\pi(\tilde{\theta}^*) = \pi(\tilde{m}^*) \pi(\phi^*) \pi(\tilde{v}^*) \pi(\tilde{p}^*, \tilde{q}^*) \quad (13.24)$$

さらに、本稿の分析では、補論1に書いてあるように、右辺のそれぞれのパラメータの事前分布に切断正規分布、逆ガンマ分布、ベータ分布といったよく知られた分布を仮定しているので、(13.24) 式の右辺の各事後密度の計算は容易である. ただし、切断正規分布の密度は、それを切断後に残した領域で積分したものが1になるように、切断する前の正規分布の密度に基準化定数を仕掛ける必要がある. ここでは、 ϕ の基準化定数は解析的に、 \tilde{m} の基準化定数は切断前の事前分布から1000回のシミュレーションを行い、(1000/指示関数の括弧内の制約を満たした回数) として求めた.

最後に、 $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}^*$ における事後密度 $\pi(\tilde{\theta}^* | \tilde{Y}_T, M_k)$ の計算には、Chib[1995]が提案しているギブス・サンプラーを用いた方法を採用する. この方法では、事後密度を以下のように4つの関数に分解し、個々の関数の値を求め、これ

らの積を事後密度とする.

$$\pi(\tilde{\theta}^* | \tilde{Y}_T) \pi(\tilde{m}^* | \tilde{Y}_T) \pi(\tilde{\phi}^* | \tilde{m}^*, \tilde{Y}_T) \pi(\tilde{v}^* | \tilde{m}^*, \tilde{\phi}^*, \tilde{Y}_T) \pi(\tilde{p}^*, \tilde{q}^* | \tilde{m}^*, \tilde{\phi}^*, \tilde{v}^*, \tilde{Y}_T). \quad (13.25)$$

右辺第1項の $\pi(\tilde{m}^* | \tilde{Y}_T)$ では3.1節および補論1で説明したパラメータ推定と同じギブス・サンプラーを、他の項の $\pi(\tilde{\phi}^* | \tilde{m}^*, \tilde{Y}_T)$, $\pi(\tilde{v}^* | \tilde{m}^*, \tilde{\phi}^*, \tilde{Y}_T)$, $\pi(\tilde{p}^*, \tilde{q}^* | \tilde{m}^*, \tilde{\phi}^*, \sigma^{2*}, \tilde{Y}_T)$ の計算では、条件のなかに含まれるパラメータはサンプリングせず、事後平均に固定してギブス・サンプラーを行う。こうしたギブス・サンプラーによってサンプリングされた値を条件に代入することにより、(13.25)式右辺の各項を以下のように計算する。

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{m}^* | \tilde{Y}_T) &= \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G \pi(\tilde{m}^* | \phi^g, \sigma^{2g}, \tilde{p}^g, \tilde{q}^g, \tilde{S}_T^g, \tilde{D}_T^g, \tilde{Y}_T), \\ \pi(\tilde{\phi}^* | \tilde{m}^*, \tilde{Y}_T) &= \frac{1}{G} \sum_{g^1=1}^G \pi(\tilde{\phi}^* | \tilde{m}^*, \sigma^{2g^1}, \tilde{p}^{g^1}, \tilde{q}^{g^1}, \tilde{S}_T^{g^1}, \tilde{D}_T^{g^1}, \tilde{Y}_T), \\ \pi(\sigma^{2*} | \phi^*, \tilde{Y}_T) &= \frac{1}{G} \sum_{g^2=1}^G \pi(\sigma^{2*} | \tilde{m}^*, \phi^*, \tilde{p}^{g^2}, \tilde{q}^{g^2}, \tilde{S}_T^{g^2}, \tilde{D}_T^{g^2}, \tilde{Y}_T), \\ \pi(\tilde{p}^*, \tilde{q}^* | \tilde{m}^*, \phi^*, \sigma^{2*}, \tilde{Y}_T) &= \frac{1}{G} \sum_{g^3=1}^G \pi(\tilde{p}^*, \tilde{q}^* | \tilde{m}^*, \phi^*, \sigma^{2*}, \tilde{S}_T^{g^3}, \tilde{D}_T^{g^3}, \tilde{Y}_T), \\ &= \frac{1}{G} \sum_{g^3=1}^G \pi(\tilde{p}^* | \tilde{S}_T^{g^3}) \pi(\tilde{q}^* | \tilde{D}_T^{g^3}). \end{aligned}$$

ここでは、 $G=1,000$ とした。

参考文献

- 大森裕浩[2001], 「マルコフ連鎖モンテカルロ法の最近の展開」『日本統計学会誌』31, pp. 305-344.
- 鈴木雪夫[1978], 『統計解析』筑摩書房.
- 中妻照雄[2007], 『入門ベイズ統計学』朝倉書店.
- 和合肇編著[2005], 『ベイズ計量経済分析——マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社.
- 渡部敏明・飯星博邦[2007], 「景気循環の構造変化と景気転換点」, 浅子和美・宮川努編『日本経済の構造変化と景気循環』東京大学出版会, 第5章, pp. 88-107.
- Chib, S. [1995], "Marginal Likelihood From the Gibbs Output," *Journal of the American Statistical Association*, 90(432), pp. 1313-1321.

- Chib, S. [1998], "Estimation and Comparison of Multiple Change-Point Models," *Journal of Econometrics*, 86(2), pp. 221–241.
- Fukuda, S. and Onodera, T. [2001], "A New Composite Index of Coincident Economic Indicators in Japan: How Can We Improve Forecast Performances?" *International Journal of Forecasting*, 17(3), pp. 483–498.
- Geweke, J. [1992], "Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments," in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith (eds.), *Bayesian Statistics 4*, Oxford University Press, Oxford.
- Hamilton, J. D. [1989], "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and Business Cycle," *Econometrica*, 57(2), pp. 357–384.
- Kim, C.-J. and Nelson, C. R. [1998], "Business Cycle Turning Points, a New Coincident Index, and Tests of Duration Dependence Based on a Dynamic Factor Model with Regime Switching," *Review of Economics and Statistics*, 80(2), pp. 188–201.
- Kim, C.-J. and Nelson, C. R. [1999a], "Has the U. S. Economy Become More Stable? A Bayesian Approach Based on a Markov-Switching Model of the Business Cycle," *Review of Economics and Statistics*, 81(4), pp. 608–616.
- Kim, C.-J. and Nelson, C. R. [1999b], *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- Ripley, B. D. [1987], *Stochastic Simulation*, New York: Wiley.
- Shephard, N. and Pitt, M. K. [1997], "Likelihood Analysis of Non-Gaussian Measurement Time Series," *Biometrika*, 84(3), pp. 653–667.
- Watanabe, T. [2003], "Measuring Business Cycle Turning Points in Japan with a Dynamic Markov Switching Factor Model," *Monetary and Economic Studies*, 21(1), pp. 35–68.