計量経済モデル　研修資料（１）

［データの準備］

（１）workfile “bankloan1”を開く。

（２）変数”L”（全国銀行貸出額）をクリック。

（３）”procs”→ “seasonal adjustment”→　“census X12”を開く。

（４）”multiplicative”、“auto”を選び、”final seasonally adjusted series “をチェックして”OK”をクリック。

（５）workfileに季節調整済系列　”L_SA”ができる。

（６）変数”DE”（全国銀行預金額）についても同様に季調済系列”DE_SA”を作成する。

（７）変数”Y”（鉱工業生産指数、これは季調済系列）をクリック。

（８）”procs”→ “hodrik-prescott filter”を開く。

（９）”smoothed series”に”YT”を入力して”OK”をクリック。

Hodrick-Prescott フィルター：$y_t = g_t + c_t$　　g_t：成長要因、c_t：循環要因

$$\underset{\{g_t\}_{t=-1}^{T}}{Min}\left\{\sum_{t=1}^{T} c_t^{\ 2} + \lambda \sum_{t=1}^{T} [(g_t - g_{t-1}) - (g_{t-1} - g_{t-2})]^2\right\}$$

［1］同時方程式モデルの例

同時方程式モデルの具体例（１）：全国銀行貸出市場

需要関数　$L = a_0 - a_1 R + u_d$　供給関数　$L = b_0 + b_1 R + u_s$

L：全国銀行貸出額（期末残高）　　　R：国内銀行貸出約定平均金利

貸出額を金利で説明する式はどのような意味があるのか？

EViewsの操作(1)

方程式の推計と保存

（１）”quick”→ “estimate equation”を開く。

（２）”equation specification”に”L_SA C R”を入力して”OK”をクリック。

（最初の変数が被説明変数、”C”は定数項、その後は説明変数）

Dependent Variable: L_SA
Method: Least Squares
Date: 10/05/03　Time: 10:57
Sample: 1980:1 2001:2
Included observations: 86

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5933422.	236054.6	25.13581	0.0000
R	-433876.6	42360.76	-10.24242	0.0000

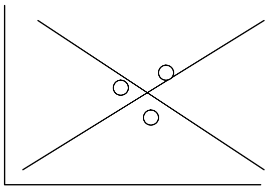
R-squared	0.555337	Mean dependent var	3686204.
Adjusted R-squared	0.550043	S.D. dependent var	1203964.
S.E. of regression	807604.9	Akaike info criterion	30.06451
Sum squared resid	5.48E+13	Schwarz criterion	30.12159
Log likelihood	-1290.774	F-statistic	104.9071
Durbin-Watson stat	0.022078	Prob(F-statistic)	0.000000

［2］識別問題

識別問題の具体例

$\boxed{\text{モデル１：識別不能}}$

需要関数　$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \varepsilon_{dt} \quad \alpha_1 < 0$　　　供給関数　$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \varepsilon_{st} \quad \beta_1 > 0$

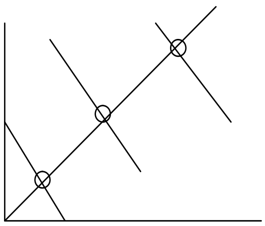


需要関数と供給関数の１次結合も両関数と同じ形になる。３つの関数は「観測上同等」
価格 P_t を数量 Q_t に回帰しても、どの関係を推計したのかはわからない。また、この例では、誘導形パラメター（２個）から構造パラメター（４個）を求めることはできない。

$\boxed{\text{モデル２：供給関数が丁度識別できる}}$

需要関数　$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + \varepsilon_{dt} \quad \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$

供給関数　$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \varepsilon_{st} \quad \beta_1 > 0$



需要曲線と供給曲線の１次結合は需要関数と同じ形になるが、供給曲線とは異なる。このケースでは、誘導形パラメター（４個）から構造パラメター（５個）をすべて求めることはできないが、供給関数の構造パラメターはすべて求めることができる。

$\boxed{\text{モデル３：両関数が丁度識別できる}}$

需要関数　$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + \varepsilon_{dt} \quad \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$

供給関数　$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + \varepsilon_{st} \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$

１次結合は需要曲線とも供給曲線とも異なる。誘導形パラメター（６個）から構造形パラメター（６個）を求めることができる。

$\boxed{\text{モデル４：供給関数が過剰識別}}$

需要関数　$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 X_t + \varepsilon_{dt} \quad \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0$

供給関数　$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Z_t + \varepsilon_{st} \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$

１次結合は需要曲線とも供給曲線とも異なる。誘導形パラメター（８個）から構造形パラメター（７個）は２種類求めることができる。

補足説明

内生変数：モデルで説明する変数。このモデルではQ_t, P_t。内生変数の数=方程式の本数
外生変数：モデルの外側で決まる変数。このモデルではY_t。

誘導形：モデルを内生変数について解いた形。内生変数は外生変数の関数になっている。

$$P_t = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} Y_t + \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1}(\varepsilon_{dt} - \varepsilon_{st})$$

$$Q_t = \frac{\beta_1\alpha_0 - \beta_0\alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\beta_1\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} Y_t + \frac{1}{\beta_1 - \alpha_1}(\beta_1\varepsilon_{dt} - \alpha_1\varepsilon_{st})$$

誘導形の係数は誘導形をOLSで推計して求めることができる（間接最小２乗法）。

$$P_t = \pi_{11} + \pi_{12} Y_t + u_{1t}$$

$$Q_t = \pi_{21} + \pi_{22} Y_t + u_{2t}$$

誘導形の推定値から、供給関数（構造形）のパラメーターを求めることができる。

$$\beta_1 = \frac{\hat{\pi}_{22}}{\hat{\pi}_{12}}$$

$$\beta_0 = \left(\hat{\pi}_{21} - \frac{\hat{\pi}_{22}\hat{\pi}_{11}}{\hat{\pi}_{12}} \right)$$

しかし、需要関数（構造形）のパラメーターを求めることはできない。

なお、過剰識別の場合（モデル４の供給関数）には、誘導形の推定値から構造形のパラメーターを複数計算することができる。

同時方程式モデルの一般的表現：以下の説明は Greene(2000),Ch.16 に基づく。

構造形

$$\gamma_{11}Y_{1t}+\gamma_{12}Y_{2t}+\ldots+\gamma_{1G}Y_{Gt}+\beta_{11}X_{1t}+\beta_{12}X_{2t}+\ldots+\beta_{1K}X_{Kt}=\varepsilon_{1t}$$
$$\gamma_{21}Y_{1t}+\gamma_{22}Y_{2t}+\ldots+\gamma_{2G}Y_{Gt}+\beta_{21}X_{1t}+\beta_{22}X_{2t}+\ldots+\beta_{2K}X_{Kt}=\varepsilon_{2t}$$
$$\vdots$$
$$\gamma_{G1}Y_{1t}+\gamma_{G2}Y_{2t}+\ldots+\gamma_{GG}Y_{Gt}+\beta_{G1}X_{1t}+\beta_{G2}X_{2t}+\ldots+\beta_{GK}X_{Kt}=\varepsilon_{Gt}$$

$$\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1G}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2G}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots & \gamma_{GG}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{1t}\\ Y_{2t}\\ \vdots\\ Y_{Gt}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1K}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2K}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GK}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{1t}\\ X_{2t}\\ \vdots\\ X_{Kt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{it}\\ \varepsilon_{2t}\\ \vdots\\ \varepsilon_{Gt}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{\Gamma Y}_t+\mathbf{BX}_t=\boldsymbol{\varepsilon}_t$

G:方程式の本数、K:説明変数の数

$\mathbf{\Gamma}:G\times G$ の構造形係数行列　$\mathbf{Y}_t:G\times 1$の内生変数ベクトル

$\mathbf{B}:G\times K$ の構造形係数行列　$\mathbf{X}_t:K\times 1$の外生変数ベクトル

$\boldsymbol{\varepsilon}_t:G\times 1$の構造誤差ベクトル　$\boldsymbol{\varepsilon}_t\sim N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma})$　ただし、$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_s')=\mathbf{0}$, $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t')=\mathbf{\Sigma}$

$\mathbf{\Sigma}:G\times G$ の分散共分散行列（正値定符号の対称行列）

誘導形

$\mathbf{\Gamma}$ が非特異という仮定の下で、

$$\begin{aligned}\mathbf{Y_t}&=-\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{BX}_t+\mathbf{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t\\ &=\mathbf{\Pi X}_t+\mathbf{v}_t\end{aligned}$$

$\mathbf{\Pi}:G\times K$ の誘導形係数行列、構造形係数の関数になる。 $\mathbf{v}_t:G\times 1$ の誘導形誤差ベクトル

$\mathbf{v}_t\sim N(\mathbf{0},\mathbf{\Omega})$　ただし、$E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_s')=\mathbf{0}$, $E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t')=E[\mathbf{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t'(\mathbf{\Gamma}^{-1})']=\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{\Sigma}(\mathbf{\Gamma}^{-1})'$

$\mathbf{\Omega}:G\times G$ の分散共分散行列

識別条件

構造形と誘導形のパラメターの数を一般形で比較すると、G^2 個だけ構造形のパラメターの方が多い。

パラメターに関する以下のような制約が必要になる。

（１） 標準化：$\gamma_{ii}=1$, $i=1,2,\ldots G$

（２） 係数のゼロ制約

（３） 恒等式制約

（４） 方程式内の係数制約

（５） 方程式間の係数制約

（６） 分散共分散行列に関する制約

構造形と誘導形の係数の関係

$\mathbf{\Gamma\Pi} = -\mathbf{B}$

第 i 番目の方程式

$\boldsymbol{\gamma}_i \mathbf{\Pi} = -\boldsymbol{\beta}_i$

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \begin{bmatrix} \underbrace{\gamma_{i1}\,\gamma_{i2}\cdots\gamma_{ig}}_{g} & \underbrace{0\,0\cdots0}_{g^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\boldsymbol{\gamma}_g}_{1\times g} & \underbrace{\mathbf{0}_{g^*}}_{1\times g^*} \end{bmatrix}$$

g ：i 番目の方程式に含まれる内生変数の数

$g^* = G - g$ ：i 番目の方程式に含まれない内生変数の数

$$\boldsymbol{\beta}_i = \begin{bmatrix} \underbrace{\beta_{i1}\,\beta_{i2}\cdots\beta_{ig}}_{k} & \underbrace{0\,0\cdots0}_{k^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\boldsymbol{\beta}_k}_{1\times k} & \underbrace{\mathbf{0}_{k^*}}_{1\times k^*} \end{bmatrix}$$

k ：i 番目の方程式に含まれる外生変数の数

$k^* = K - k$ ：i 番目の方程式に含まれない外生変数の数

誘導形係数行列を分割

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_g & \mathbf{0}_{g^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{\mathbf{\Pi}_{gk}}_{g\times k} & \underbrace{\mathbf{\Pi}_{gk^*}}_{g\times k^*} \\ \underbrace{\mathbf{\Pi}_{g^*k}}_{g^*\times k} & \underbrace{\mathbf{\Pi}_{g^*k^*}}_{g^*\times k^*} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_k & \mathbf{0}_{k^*} \end{bmatrix}$$

次の２つのサブシステムが得られる。

$\boldsymbol{\gamma}_g \mathbf{\Pi}_{gk} = -\boldsymbol{\beta}_k$

$\boldsymbol{\gamma}_g \mathbf{\Pi}_{gk^*} = \mathbf{0}_{k^*}$

下のサブシステムから γ の値が求められれば、上の式から $\boldsymbol{\beta}$ も決まる。

下のサブシステムには g 個の γ が含まれているが、そのうち一つを１とする基準化を行うと $g-1$ 個の係数を決めればよい。そのためには、

（１） 方程式の本数が少なくとも $g-1$ 本必要、つまり $k^* \geq g-1$（必要条件）。

（２） 下のサブシステムが $g-1$ 本の独立な方程式を含む、つまり $\mathrm{rank}(\mathbf{\Pi}_{gk^*}) = g-1$（必要十分条件）。

（３） また、i 番目の構造方程式には含まれないが他の構造方程式には含まれる $(g^*+k^*)\times(G-1)$ の係数行列を $\mathbf{\Delta}$ とすると、$\mathrm{rank}(\mathbf{\Pi}_{gk^*}) = \mathrm{rank}(\mathbf{\Delta}) - g^*$ となるので、必要十分条件は $\mathrm{rank}(\mathbf{\Delta}) = G-1$ と表すこともできる。

識別の次数条件： $k^* \geq g-1$（その方程式に含まれない外生変数の数が、その方程式に含まれる内生変数の数から１を引いた値以上でなければならない、あるいは、モデルの全外生変数の数が､その方程式に含まれる全変数の数から１を引いた値以上でなければならない）

識別の階数条件： $\mathrm{rank}(\mathbf{\Delta}) = G-1$

過剰識別　：$k^* > g-1$ かつ $\mathrm{rank}(\mathbf{\Delta}) = G-1$

丁度識別　：$k^* = g-1$ かつ $\mathrm{rank}(\mathbf{\Delta}) = G-1$

識別不能　：$k^* \geq g-1$ かつ $\mathrm{rank}(\mathbf{\Delta}) < G-1$　または、$k^* < g-1$

<u>同時方程式モデルの具体例（２）</u>

需要関数　$L = a_0 - a_1 R + a_2 BR + a_3 Y + u_d$

供給関数　$L = b_0 + b_1 R - b_2 CR + b_3 D + u_s$

BR ：事業債利回り（AAA 格、12 年）　Y ：鉱工業生産指数のトレンド（ＨＰフィルター）

CR ：コールレート（有担保翌日物）　D ：全国銀行預金額（期首残高）

需要関数も供給関数も過剰識別

EViews の操作(2)

１）各関数の推定

（１）”quick”→“estimate equation”を開く。

（２）”equation specification”に”L_SA C R BR YT”を入力して”OK”をクリック。

（３）推定結果のウィンドウで”name”を開き、”eqd01”と入力。

（４）”quick”→“estimate equation”を開く。

（５）”equation specification”に”L_SA C R CR DE_SA(-1)”を入力して”OK”をクリック。

（６）推定結果のウィンドウで”name”を開き、”eqs01”と入力。

２）モデルの作成

（１）workfile で”objects”→“new object”を開き、”model”を選択。

（２）”model”ウィンドウで、”text”を選択。

（３）テキストが入力できるので、１行目に”:EQD01”と入力。

（４）workfile で”EQS01”をクリック、推定結果のウィンドウで”view”→“representations”を開き、”model”を選択。

（５）”substituted coefficients”の式の部分をコピー＆ペーストで”model”ウィンドウの”text”画面の３行目にコピー。

（６）貸出利子率”R”の項が左辺の先頭に来るように編集する。

（７）”model”ウィンドウで”equation”を選択して、さらに”yes”を選択。

（８）”name”を選択して”model01”の名前のまま”OK”をクリック。

３）モデルの操作

”model”ウィンドウで”solve”を選択、その後はモデルの解法等を選択して実行。

［3］同時方程式バイアスと個別方程式の推定法

構造形
$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_t$$
$$Y_t = C_t + I_t$$

誘導形
$$C_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1}\varepsilon_t$$
$$Y_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} I_t + \frac{1}{1-\alpha_1}\varepsilon_t$$

消費関数の説明変数 Y_t と誤差項 ε_t は無相関ではない。 $\mathrm{cov}(Y_t, \varepsilon_t) = \frac{1}{1-\alpha_1}\sigma^2 \neq 0$

消費関数の係数の最小２乗推定量 $\hat{\alpha}_1$ は一致性をもたない。

$$\alpha_{1,OLS} = \frac{\sum y_t c_t}{\sum {y_t}^2},\quad c_t = C_t - \overline{C},\quad y_t = Y_t - \overline{Y}$$
$$= \frac{\sum y_t(\alpha_1 y_t + \varepsilon_t)}{\sum {y_t}^2} = \alpha_1 + \frac{\sum y_t \varepsilon_t}{\sum {y_t}^2}$$

$$\mathrm{p}\lim(\hat{\alpha}_{1,OLS}) = \alpha_1 + \frac{1}{1-\alpha_1}\left(\frac{\sigma^2}{\mathrm{var}(Y_t)}\right)$$

<u>操作変数法</u>

操作変数の条件

（１） 推計する構造方程式の誤差項と相関を持たない。

（２） 推計する構造方程式の説明変数と相関を持つ。

同時方程式モデルの場合は推計する構造方程式に含まれない外生変数が操作変数の候補となる。

上記のモデルでは、 I_t を操作変数として用いることができる。（１）の条件より、

$$\frac{1}{n}\sum i_t(c_t - \alpha_1 y_t) = 0,\quad i_t = I_t - \bar{I}$$

（２）の条件を用いると、

$$\hat{\alpha}_{1,ins} = \frac{\sum i_t c_t}{\sum i_t y_t} = \frac{\sum i_t(\alpha_1 y_t + \varepsilon_t)}{\sum y_t i_t} = \alpha_1 + \frac{\sum i_t \varepsilon_t}{\sum y_t i_t}$$

$\mathrm{p}\lim(\hat{\alpha}_{1,INS}) = \alpha_1 + \frac{1}{1-\alpha_1}\frac{\mathrm{cov}(i_t, \varepsilon_t)}{\mathrm{cov}(i_t, y_t)} = \alpha_1$ 　操作変数法による推定量は一致推定量。

同時方程式モデルで丁度識別の構造方程式では、操作変数を必要とする右辺の内生変数の数（ $g-1$ ）と操作変数の候補となる外生変数（当該方程式に含まれない外生変数）の数（ k^* ）が等しい。識別不能のケースでは操作変数の数が足りない。また、過剰識別のケースでは、操作変数の数が多すぎることになる。

２段階最小２乗法

第１段階：右辺に現れる内生変数の誘導形方程式を OLS で推定して、内生変数の予測値を求める。

第２段階：当該構造方程式の右辺の内生変数を第１段階の予測値で置き換えて、OLS で推定する。

$Y_t = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1} I_t + \dfrac{1}{1-\alpha_1}\varepsilon_t$ 　を最小２乗法で推定して $\hat{Y}_t$ を求める。

$\hat{y}_t = \dfrac{\sum i_t y_t}{\sum i_t^{\,2}} i_t, y_t = \hat{y}_t + w_t$ を構造方程式に代入。

$$c_t = \alpha_1 \left(\frac{\sum i_t y_t}{\sum i_t^{\,2}} i_t \right) + \alpha_1 w_t + \varepsilon_t$$

この式の誤差項 $\alpha_1 w_t + \varepsilon_t$ の第１項は第１段階の OLS の性質から、第２項は I_t が外生変数であることからこの式の説明変数とは無相関。したがって、この式の OLS 推定量は一致推定量で、かつ、

$$\alpha_{1,2SLS} = \frac{\sum i_t y_t \sum i_t c_t}{\sum i_t^{\,2}} \Bigg/ \frac{\left(\sum i_t y_t\right)^2 \sum i_t^{\,2}}{\left(\sum i_t^{\,2}\right)^2} = \frac{\sum i_t c_t}{\sum i_t y_t}$$

となるので、操作変数法と２段階最小２乗法の推定量は同じものである。

２段階最小２乗法では、各内生変数の誘導形から得られる予測値が操作変数として使われていると考えることができる。過剰識別で操作変数の候補が多すぎる場合でも、誘導形を推定することで複数の操作変数の最適な線形結合が求められる。

EViews の操作(3)

１）２段階最小２乗法による推定

（１）”quick”→“estimate equation”を開き、”method”を”tsls”にする。

（２）”equation specification”に”L_SA C R BR YT”を入力する。

（３）”instrument list”に”C BR YT CR DE_SA(-1)”を入力して”OK”をクリック。

（４）推定結果のウィンドウで”name”を開き、”eqd02”と入力。

（５）”quick”→“estimate equation”を開く、”method”を”tsls”にする。

（６）”equation specification”に”L_SA C R CR DE_SA(-1)”を入力する。

（７）”instrument list”に”C BR YT CR DE_SA(-1)”を入力して”OK”をクリック。

（８）推定結果のウィンドウで”name”を開き、”eqs02”と入力。

２）モデルの作成

EViewsの操作(2)と同じ方法で作成、名前は”model02”になる。

３）モデルの操作

（１）”model”ウィンドウで”solve”を選択して、さらに”basic options”
で、”add/delete scenarios”をクリックして”scenario specification”を開く

（２）”create new scenario”をクリックすると、”scenario02”ができる。

（３）”rename selected”で”scenario02”を”baseline2”に変える。

以上の準備で、”model02”のファイナルテストの結果は変数名の後に”_2”が付く。

以下のうち疑問点１から疑問点３の説明は **Maddala(1992)** の第８章に基づく。

疑問点１

操作変数法では、構造方程式に含まれない外生変数が操作変数として用いられ、２段階最小２乗法ではモデルに含まれるすべての外生変数の線形結合が操作変数として含まれている（上の例ではたまたま消費関数に含まれる外生変数は存在しない）。

$y_1 = \gamma_1 y_2 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \varepsilon_1$

$y_2 = \gamma_2 y_1 + \beta_3 z_3 + \varepsilon_2$

最初の式で２段階最小２乗法を用いる場合を考える。内生変数 y_2 の誘導形の推定量 $\hat{y}_2$ を用いて OLS で推定するということは、

$$\sum \hat{y}_2 \varepsilon_1 = \sum (\pi_{11} z_1 + \pi_{12} z_2 + \pi_{13} z_3)\varepsilon_1 = 0$$

$$\sum z_1 \varepsilon_1 = 0$$

$$\sum z_2 \varepsilon_1 = 0$$

という正規方程式を使っていることになる。第２式、第３式より、第１式は $\sum z_3 \varepsilon_1 = 0$ となるから、 z_3 だけを操作変数として使う操作変数法と同じである。

疑問点２

上記のモデルの第１式で、 y_1 を誘導形の推定量 $\hat{y}_1$ に置き換えるとどうなるのか。

y_1 を使った場合の正規方程式

$$\sum \hat{y}_2 (y_1 - \gamma_1 \hat{y}_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2) = 0$$

$$\sum z_1 (y_1 - \gamma_1 \hat{y}_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2) = 0$$

$$\sum z_2 (y_1 - \gamma_1 \hat{y}_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2) = 0$$

$y_1 = \hat{y}_1 + w$ と表すことができ、 w はすべての外生変数（誘導形方程式の説明変数）およびその線形結合である $\hat{y}_1$ および $\hat{y}_2$ と無相関である。この関係を上の正規方程式に代入すると、

$$\sum \hat{y}_2 (\hat{y}_1 - \gamma_1 \hat{y}_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2) + \sum \hat{y}_2 w = \sum \hat{y}_2 (\hat{y}_1 - \gamma_1 \hat{y}_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2) = 0$$

$$\sum z_1 (\hat{y}_1 - \gamma_1 \hat{y}_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2) + \sum z_1 w = \sum z_1 (\hat{y}_1 - \gamma_1 \hat{y}_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2) = 0$$

$$\sum z_2 (\hat{y}_1 - \gamma_1 \hat{y}_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2) + \sum z_2 w = \sum z_2 (\hat{y}_1 - \gamma_1 \hat{y}_2 - \beta_1 z_1 - \beta_2 z_2) = 0$$

この最後の部分は次の回帰方程式の正規方程式になっている。

$\hat{y}_1 = \gamma_1 \hat{y}_2 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + u$

つまり、 y_1 を使っても $\hat{y}_1$ を使っても結果は同じ。

疑問点３

上記のモデルでは第１式で y_1 の係数、第２式で y_2 の係数が１に基準化されている。基準化の方法はこれ以外にもあるが、その選択は推定結果に影響を与えるのか。

過剰識別のケースでは基準化の影響はある。丁度識別の第１式の正規方程式は $\sum z_1\varepsilon_1 = 0, \sum z_2\varepsilon_1 = 0, \sum z_3\varepsilon_1 = 0$ なので、基準化の方法は関係ない。過剰識別の第２式では、z_1 と z_2 の線形結合が操作変数として用いられるので、y_1 の誘導形の推定結果がウェイトとして使われる場合と、y_2 の誘導形の推定結果がウェイトとして使われる場合では最終的な推定結果は異なる。

疑問点４　以下の説明は伴(1991)の第４章に基づく。

同時方程式モデルを OLS で推定すること（多くの大型マクロ計量経済モデルで採用されている方法）は大きな問題なのかどうか？

２段階最小２乗法の第１段階の誘導形方程式の当てはまりが非常に良ければ、右辺に現れる内生変数のところに実績値をそのまま使っても（OLS）、誘導形による予測値を使っても（TSLS）最終結果に大きな差は生じない。大型のモデルになると外生変数の数が非常に多くなるので、概して誘導形の当てはまりは良くなる。このことが OLS を使うことのエクスキューズになるかというと、それよりはむしろ TSLS に問題ありと考えるべきである。

一致性という漸近的な性質はサンプルサイズが小さい場合（マクロ時系列データの大半について当てはまる）にあまり頼りにしてはいけない。小標本特性は次に紹介する制限情報最尤法（LIML）が優れている。

制限情報最尤法（最小分散比法）以下の説明は Maddala(1992)の第 8 章に基づく。

$y_1 = \gamma_1 y_2 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \varepsilon_1$

$y_2 = \gamma_2 y_1 + \beta_3 z_3 + \varepsilon_2$

最初の方程式を変形して、

$y^* = y_1 - \gamma_1 y_2 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \varepsilon$

y^* を z_1 と z_2 に回帰したときの残差平方和を RRS_1、 z_1, z_2, z_3 に回帰したときの残差平方和を RRS_2 とすると、これらは当然 γ_1 の関数になっている。上記の式は z_3 の説明力がないことを意味しているので、比率 RSS_1/RSS_2 が最小になるように γ_1 を求めればよい。γ_1 が求まれば y^* が計算できるので、 y^* を z_1, z_2 に回帰すると残りのパラメターを推定できる。

（１）　丁度識別のケースでは TSLS と LIML は等しい。

（２）　漸近的には TSLS と LIML は等しい。

（３）　過剰識別で $k^* - (g-1)$ が大きくなるにつれて、TSLS の小標本特性は OLS に近づいていき、LIML が優れた特性を持つ。

［4］一般化積率法（GMM）

一般化最小２乗法（GLS）　以下の説明は Greene(2000) Ch.11 に基づく。

不均一分散や系列相関の場合

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$E[\boldsymbol{\varepsilon} \mid \mathbf{X}] = \mathbf{0}$$
$$E[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}' \mid \mathbf{X}] = \sigma^2 \mathbf{\Omega}$$

$$\sigma^2\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad \sigma^2\mathbf{\Omega} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ & & \vdots & \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

OLS は不偏性、一致性（ある条件の下で）をもつが、有効ではない。
一般化最小２乗法（最小分散線形不偏推定量）

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$$

一般化積率法(GMM)　以下の説明は Hayashi(2000) Ch.3 に基づく。

仮定１（線形性）：$y_i = \mathbf{z}_i'\boldsymbol{\delta} + \varepsilon_i \quad i = 1,2,\cdots,n$　　　z_i：L 次元説明変数ベクトル

仮定２（定常性）：説明変数、被説明変数、操作変数について。

仮定３（直交条件）：K 個の操作変数は先決変数で、誤差項と直交する。

$E[\mathbf{x}_i(y_i - \mathbf{z}_i'\boldsymbol{\delta})] = 0 \quad or \quad E(\mathbf{g}_i) = 0$　　ただし、$\mathbf{g}_i \equiv \mathbf{x}_i\varepsilon_i$

仮定４（識別の階数条件）：$K \times L$ の行列 $E(\mathbf{x}_i\mathbf{z}_i')$ はフルランク

次数条件は $K \ge L$

仮定５（$\mathbf{g}_i$ は martingale difference sequence with finite second moments）

直交条件の標本モーメント

$$\mathbf{g}_n(\tilde{\boldsymbol{\delta}}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{g}_n(\tilde{\boldsymbol{\delta}}) \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}(\mathbf{w}_i;\tilde{\boldsymbol{\delta}})$$

直交条件は K 本ある。$K = L$ のときにはユニークな解 $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ を求めることができ、この解は操作変数の推定量に一致する。

$K > L$ つまり過剰識別のときにどうすればよいか？

個々の直交条件を正確に満たす $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ は見つけられないが、$\mathbf{g}_n(\tilde{\boldsymbol{\delta}})$ をできるだけ $\mathbf{0}$ に近づける $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ を求めることはできる。ウェイティング行列 $\hat{\mathbf{W}}$ を用いてある距離を定義して、その距離が最小になるように $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ を決めればよい。

GMM推定量の定義

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}(\hat{\mathbf{W}}) \equiv \arg\min_{\tilde{\boldsymbol{\delta}}} \mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\mathbf{W}}) \quad \mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\mathbf{W}}) \equiv n\mathbf{g}_n(\tilde{\boldsymbol{\delta}})\hat{\mathbf{W}}\mathbf{g}_n(\tilde{\boldsymbol{\delta}})'$$

線形のケースでは、

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}(\hat{\mathbf{W}}) = (\underset{L\times K}{\mathbf{S}'_{\mathbf{XZ}}}\ \underset{K\times K}{\hat{\mathbf{W}}}\ \underset{K\times L}{\mathbf{S}_{\mathbf{XZ}}})^{-1}\ \underset{L\times K}{\mathbf{S}'_{\mathbf{XZ}}}\ \underset{K\times K}{\hat{\mathbf{W}}}\ \underset{K\times 1}{\mathbf{s}_{\mathbf{Xy}}}$$

ここで、$\underset{K\times L}{\mathbf{S}_{\mathbf{XZ}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}(x_{11}z_{11} + \cdots + x_{1n}z_{1n}) & \cdots & \frac{1}{n}(x_{11}z_{L1} + \cdots + x_{1n}z_{Ln}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n}(x_{K1}z_{11} + \cdots + x_{Kn}z_{1n}) & \cdots & \frac{1}{n}(x_{K1}z_{L1} + \cdots + x_{Kn}z_{Ln}) \end{bmatrix}$

$$\underset{K\times 1}{\mathbf{s}_{\mathbf{Xy}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}(x_{11}y_1 + \cdots + x_{1n}y_n \\ \vdots \\ \frac{1}{n}(x_{K1}y_1 + \cdots + x_{Kn}y_n \end{bmatrix}$$

上記の仮定の下で、GMM 推定量は一致性、漸近的正規性をもつ。

また、$K = L$ のときには、$\hat{\boldsymbol{\delta}}(\hat{\mathbf{W}}) = \underset{L\times L}{\mathbf{S}_{\mathbf{XZ}}}{}^{-1}\ \underset{L\times L}{\hat{\mathbf{W}}}{}^{-1}\ \underset{L\times L}{\mathbf{S}'_{\mathbf{XZ}}}{}^{-1}\ \underset{L\times L}{\mathbf{S}'_{\mathbf{XZ}}}\ \underset{L\times L}{\hat{\mathbf{W}}}\ \underset{K\times 1}{\mathbf{s}_{\mathbf{Xy}}} = \underset{L\times L}{\mathbf{S}_{\mathbf{XZ}}}{}^{-1}\ \underset{K\times 1}{\mathbf{s}_{\mathbf{Xy}}}$ となり、操作変数法と一致する。

次の問題：有効な推定量を得るにはどのようなウェイティング行列を用いればよいか。

GMM 推定量の漸近分散の下限は、$\operatorname{plim}\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{S}^{-1}$ となる $\hat{\mathbf{W}}$ を用いたときになる。

$\mathbf{S} = E(\mathbf{g}_i\mathbf{g}'_i) = E(\varepsilon_i^2\mathbf{x}_i\mathbf{x}'_i)$ の推定量は $\hat{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2\mathbf{x}_i\mathbf{x}'_i$ 、ただし、$\hat{\varepsilon}_i \equiv y_i - \mathbf{z}'_i\hat{\boldsymbol{\delta}}$ で $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ は $\boldsymbol{\delta}$ の一致推定量である（ここまで不均一分散のみを仮定していることに注意、系列相関は仮定していない）。したがって、まず $\boldsymbol{\delta}$ の一致推定量を求めればよい。

第１段階：通常２段階最小２乗法で $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ を求めて $\hat{\mathbf{S}}$ を計算する。なお、TSLS は $\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{S}_{\mathbf{XX}}^{-1}$ としたときの GMM 推定量に一致する（あるいは分散が均一のときの GMM といってもよい）。

つまり、$\hat{\mathbf{S}} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2\mathbf{x}_i\mathbf{x}'_i = \hat{\sigma}^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i\mathbf{x}'_i$ と分散が一定のとき、

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\delta}}(\hat{\mathbf{S}}^{-1}) &= [\mathbf{S}'_{\mathbf{XZ}}(\hat{\sigma}^2\mathbf{S}_{\mathbf{XX}})^{-1}\mathbf{S}_{\mathbf{XZ}}]^{-1}\mathbf{S}'_{\mathbf{XZ}}(\hat{\sigma}^2\mathbf{S}_{\mathbf{XX}})^{-1}\mathbf{s}_{\mathbf{Xy}} \\ &= (\mathbf{S}'_{\mathbf{XZ}}\mathbf{S}_{\mathbf{XX}}{}^{-1}\mathbf{S}_{\mathbf{XZ}})^{-1}\mathbf{S}'_{\mathbf{XZ}}\mathbf{S}_{\mathbf{XX}})^{-1}\mathbf{s}_{\mathbf{Xy}} = \hat{\boldsymbol{\delta}}(\mathbf{S}_{\mathbf{X}X}{}^{-1}) \equiv \hat{\boldsymbol{\delta}}_{2SLS}\end{aligned}$$

となる。

第２段階：第１段階の $\hat{\mathbf{S}}$ を用いて GMM 推計量を計算する。

このウェイトの決め方は、非常に直感的に言うと、残差２乗和の大きな直交条件（より不正確にしか成立しない条件）に小さなウェイトを付けているということである（Favero(2001),p.220）。

参考：OLS での不均一分散

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t,\quad E(u_t) = 0,\quad E(u_t^2) = \sigma^2 X_t^2$$

このとき、推定量の正しい分散は $\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \dfrac{\sum x_t^2 \sigma_t^2}{\left(\sum x_t^2\right)^2}$ で、通常の計算方法による分散、$\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \dfrac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$ とは異なる。White は $\dfrac{1}{n}\sum \sigma_t^2 \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t'$ の一致推定量は $\dfrac{1}{n}\sum e_t^2 \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t'$ で得られることを示した。

過剰識別条件のテスト

$$\mathbf{J}(\hat{\boldsymbol{\delta}}(\hat{\mathbf{S}}^{-1}), \hat{\mathbf{S}}^{-1}) = n\mathbf{g}_n(\hat{\boldsymbol{\delta}}(\hat{\mathbf{S}}^{-1}))'\hat{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{g}_n(\hat{\boldsymbol{\delta}}(\hat{\mathbf{S}}^{-1}))) \underset{d}{\to} \chi^2(K-L)$$

この統計量が非常に大きな値をとるとき、直交条件あるいは他の仮定が誤っていることになる。例えば、他の仮定が成立しているならば、操作変数の内生性が示唆されることになる。

EViews の操作(4)

１）GMMによる推定

（１）”quick”→“estimate equation”を開き、”method”を”gmm”にする。

（２）”equation specification”に”L_SA C R BR YT”を入力する。

（３）”instrument list”に”C BR YT CR DE_SA(-1)”を入力する。

（４）”weighting matrix”を”cross section”にして”OK”をクリック。

（５）推定結果のウィンドウで”name”を開き、”eqd03”と入力。

（６）”quick”→“estimate equation”を開く、”method”を”gmm”にする。

（７）”equation specification”に”L_SA C R CR DE_SA(-1)”を入力する。

（８）”instrument list”に”C BR YT CR DE_SA(-1)”を入力する。

（９）”weighting matrix”を”cross section”にして”OK”をクリック。

(10) 推定結果のウィンドウで”name”を開き、”eqs03”と入力。

２）モデルの作成

EViewsの操作(2)と同じ方法で作成、名前は”model03”になる。

３）モデルの操作

（１）”model”ウィンドウで”solve”を選択して、さらに”basic options”で、”add/delete scenarios”をクリックして”scenario specification”を開く

（２）”create new scenario”をクリックすると、”scenario02”ができる。

（３）”rename selected”で”scenario02”を”baseline2”に変える。
（４）”aliasing”を開き、”alias suffix”に”3”を入力する。
以上の準備で、”model02”のファイナルテストの結果は変数名の後に”_3”が付く。
　EViewsの操作(3)同様に”scenario02”を作り、”baseline3”に変える。
以上の準備で、”model02”のファイナルテストの結果は変数名の後に”_3”が付く。

［５］システム推計

見かけ上無関係な回帰（SUR）　以下の説明はGreene(2000) Ch.15に基づく。
　M本の方程式、左辺の変数は右辺には含まれない。ただし、各方程式は誤差項を通じた関係がある。

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad i = 1,\cdots,M$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}'_M]$$
$$E[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0}, E[\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}'] = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\mathbf{I} & \sigma_{12}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{1M}\mathbf{I} \\ \sigma_{21}\mathbf{I} & \sigma_{22}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{2M}\mathbf{I} \\ & \vdots & & \\ \sigma_{M1}\mathbf{I} & \sigma_{M2}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{MM}\mathbf{I} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}$$
$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1M} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2M} \\ & \vdots & & \\ \sigma_{M1} & \sigma_{M2} & \cdots & \sigma_{MM} \end{bmatrix}$$

OLS推定量よりもGLS推定量の方が有効

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{GLS} &= \left[\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} \\ &= \left[\mathbf{X}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I})\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I})\mathbf{y} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma^{11}\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_1 & \sigma^{12}\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_2 & \cdots & \sigma^{1M}\mathbf{X}'_1\mathbf{X}_M \\ \sigma^{211}\mathbf{X}'_2\mathbf{X}_1 & \sigma^{22}\mathbf{X}'_2\mathbf{X}_2 & \cdots & \sigma^{2M}\mathbf{X}'_2\mathbf{X}_M \\ & & \vdots & \\ \sigma^{M1}\mathbf{X}'_M\mathbf{X}_1 & \sigma^{M2}\mathbf{X}'_M\mathbf{X}_2 & \cdots & \sigma^{MM}\mathbf{X}'_M\mathbf{X}_M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{M}\sigma^{1j}\mathbf{X}'_1\mathbf{y}_j \\ \sum_{j=1}^{M}\sigma^{2j}\mathbf{X}'_2\mathbf{y}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{M}\sigma^{Mj}\mathbf{X}'_M\mathbf{y}_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ただし、σ^{ij}はΣ^{-1}の第ij要素
・$\sigma_{ij} = 0,\ for\ i \neq j$のとき、GLSとOLSは一致する。
・すべての方程式の説明変数が等しいとき、GLSとOLSは一致する。

システム推定法　以下の説明はGreene(2000) Ch.16に基づく。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j &= \mathbf{Y}_j\boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j \\ &= \mathbf{Z}_j\boldsymbol{\delta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j \end{aligned}$$

全体系

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{y}_M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Z}_M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_1\\ \boldsymbol{\delta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}_M\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_M\end{bmatrix}$$

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}]=\mathbf{0},\ E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}']=\begin{bmatrix}\sigma_{11}\mathbf{I} & \sigma_{12}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{1M}\mathbf{I}\\ \sigma_{21}\mathbf{I} & \sigma_{22}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{2M}\mathbf{I}\\ & \vdots & & \\ \sigma_{M1}\mathbf{I} & \sigma_{M2}\mathbf{I} & \cdots & \sigma_{MM}\mathbf{I}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I}$$

ここで、例えばσ_{11}は１番目の方程式の誤差項の分散、分散は均一である。

$\mathbf{Z}$は内生変数を含むので、各方程式に関する最小２乗推定量、$\mathbf{d}=[\mathbf{Z}'\mathbf{Z}]^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$　は、一致推定量ではない。

（１）操作変数法による推定で一致性を確保

$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{IV}=[\overline{\mathbf{W}}'\mathbf{Z}]^{-1}\overline{\mathbf{W}}'\mathbf{y}$　（$\overline{\mathbf{W}}$は操作変数としての条件を満たす。）

（２）GLS で有効性を確保

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{IV,GLS}=[\overline{\mathbf{W}}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{Z}]^{-1}\overline{\mathbf{W}}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{y}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma^{11}\mathbf{W}_1'\mathbf{Z}_1 & \sigma^{12}\mathbf{W}_1'\mathbf{Z}_2 & \cdots & \sigma^{1M}\mathbf{W}_1'\mathbf{Z}_M\\ \sigma^{21}\mathbf{W}_2'\mathbf{Z}_1 & \sigma^{22}\mathbf{W}_2'\mathbf{Z}_2 & \cdots & \sigma^{2M}\mathbf{W}_2'\mathbf{Z}_M\\ & & \vdots & \\ \sigma^{M1}\mathbf{W}_M'\mathbf{Z}_1 & \sigma^{M2}\mathbf{W}_M'\mathbf{Z}_2 & \cdots & \sigma^{MM}\mathbf{W}_M'\mathbf{Z}_M\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{M}\sigma^{1j}\mathbf{W}_1'\mathbf{y}_j\\ \sum_{j=1}^{M}\sigma^{2j}\mathbf{W}_2'\mathbf{y}_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{M}\sigma^{Mj}\mathbf{W}_M'\mathbf{y}_j\end{bmatrix}$$

３段階最小２乗法（3SLS）　以下の説明は Greene(2000) Ch.16 に基づく。

$$\overline{\mathbf{W}}=\hat{\mathbf{Z}}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_M\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{Z}}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{Z}}_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \hat{\mathbf{Z}}_M\end{bmatrix}$$

（１）操作変数法（２段階最小２乗法による推定量）　$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{IV}=[\hat{\mathbf{Z}}'\mathbf{Z}]^{-1}\hat{\mathbf{Z}}'\mathbf{y}$

（２）GLS 推定量（３段階最小２乗法）

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{3SLS}=[\hat{\mathbf{Z}}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{Z}]^{-1}\hat{\mathbf{Z}}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{y}$$
$$=[\hat{\mathbf{Z}}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{I})\hat{\mathbf{Z}}]^{-1}\hat{\mathbf{Z}}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{y}$$

推定の手順

（１）誘導形方程式を推定して $\hat{\mathbf{Y}}_j$ を求める。

（２）各方程式について $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS}$ を推定して、$\hat{\sigma}_{ij}=\dfrac{(\mathbf{y}_i-\mathbf{Z}_i\hat{\boldsymbol{\delta}}_{i,2SLS})'(\mathbf{y}_j-\mathbf{Z}_j\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS})}{T}$ を計算する。

（３）$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ と $\hat{\mathbf{Z}}$ を用いて GLS 推定量を計算する。

3SLS 推定量は一致性をもち、漸近的に有効な推定量。

<u>完全情報最尤法（FIML）</u>

誤差項は正規分布に従う。

対数尤度関数

$$\ln L=-\frac{MT}{2}\ln(2\pi)+T\ln|\boldsymbol{\Gamma}|-\frac{T}{2}\ln|\mathbf{Z}|-\frac{T}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S})$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S})=\frac{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\sigma^{ij}(\mathbf{y}_i-\mathbf{Y}_i\boldsymbol{\gamma}_i-\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}_i)'(\mathbf{y}_j-\mathbf{Y}_j\boldsymbol{\gamma}_j-\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}_j)}{T}$$

（ここで $\boldsymbol{\Gamma}$ は内生変数にかかる構造形係数行列）

FIML 推定量は以下の方程式の不動点であることが示されている。

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{FIML}=\left[\hat{\mathbf{Z}}(\hat{\boldsymbol{\delta}})'(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{Z}\right]^{-1}\hat{\mathbf{Z}}(\hat{\boldsymbol{\delta}})'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{y}=\left[\hat{\hat{\mathbf{Z}}}'\mathbf{Z}\right]^{-1}\hat{\hat{\mathbf{Z}}}'\mathbf{y}$$

$$\hat{\mathbf{Z}}(\hat{\boldsymbol{\delta}})'(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\otimes\mathbf{I})=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}^{11}\hat{\mathbf{Z}}_1 & \hat{\sigma}^{12}\hat{\mathbf{Z}}_1 & \cdots & \hat{\sigma}^{1M}\hat{\mathbf{Z}}_1\\ \hat{\sigma}^{12}\hat{\mathbf{Z}}_2 & \hat{\sigma}^{22}\hat{\mathbf{Z}}_2 & \cdots & \hat{\sigma}^{2M}\hat{\mathbf{Z}}_2\\ & & \vdots & \\ \hat{\sigma}^{1M}\hat{\mathbf{Z}}_M & \hat{\sigma}^{M2}\hat{\mathbf{Z}}_M & \cdots & \hat{\sigma}^{MM}\hat{\mathbf{Z}}_M\end{bmatrix}=\hat{\hat{\mathbf{Z}}}'$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_j=[\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\Pi}}_j,\mathbf{X}_j]\quad \hat{\boldsymbol{\Pi}}_j=M_j\,\text{columns of}-\hat{\mathbf{B}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_{ij}=\frac{(\mathbf{y}_i-\mathbf{Z}_i\hat{\boldsymbol{\delta}}_i)'(\mathbf{y}_j-\mathbf{Z}_j\hat{\boldsymbol{\delta}}_j)}{T}\quad \hat{\sigma}^{ij}=(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1})_{ij}$$

このことから、FIML 推定量も操作変数による推定量であることがわかる。また、3SLS と FIML の漸近共分散行列は等しい。

<u>一般化積率法（GMM）</u>

個別方程式に関する直交条件

$$E[\mathbf{x}_t\varepsilon_{jt}]=E[\mathbf{x}_t(y_{jt}-\hat{\mathbf{z}}_{jt}\delta_j)]=\mathbf{0}$$

全方程式のパラメターの推定に関する基準

$$q = \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} \mathbf{e}(\mathbf{z}_t, \boldsymbol{\delta}_j)'\mathbf{X}[\mathbf{W}]^{jl}\mathbf{X}'\mathbf{e}(\mathbf{z}_t, \boldsymbol{\delta}_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M} \mathbf{m}(\boldsymbol{\delta}_j)'\mathbf{X}[\mathbf{W}]^{jl}\mathbf{m}(\boldsymbol{\delta}_j)$$
$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\delta}_j) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t(y_{jt} - \mathbf{z}'_{jt}\boldsymbol{\delta}_j)$$

最適なウェイティング行列は、サンプルモーメントの共分散行列から得られる。
誤差項が不均一分散のケースでは、ウェイトとして以下の要素をもつ行列を用いる。ここで、$\mathbf{d}$ は 2SLS によって得られる推定値。

$$\mathbf{S}_{jl} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{x}_t\mathbf{x}'_t(y_{jt} - \mathbf{z}'_{jt}\mathbf{d}_j)(y_{lt} - \mathbf{z}'_{lt}\mathbf{d}_l)$$

GMM 推定の１階条件

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial \boldsymbol{\delta}_j} = \sum_{l=1}^{M}\mathbf{Z}'_j\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{S}_{jl}\mathbf{X})'\mathbf{X}'(\mathbf{y}_l - \mathbf{Z}_l\boldsymbol{\delta}_l) = \mathbf{0}$$

・$\mathbf{S}_{jj} = \hat{\sigma}_{jj}(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ **and** $\mathbf{S}_{jl} = \mathbf{0}$ for $j \neq l$ のとき、GMM 推定量は TSLS 推定量
・$\mathbf{S}_{jl} = \hat{\sigma}_{jl}(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ のとき、GMM 推定量は 3SLS 推定量

EViews の操作(5)

（１）workfile で ”objects ”→ “ new object ”を開き、 ”system ”を選択。
（２） ”system ”ウィンドウで、次の式を入力。
“ L_SA = C(1) + C(2)*R + C(3)*BR + C(4)*YT @ BR YT CR DE_SA(-1) ”
“ R = C(5) + C(6)*L_SA + C(7)*CR + C(8)*DE_SA(-1) @ BR YT CR DE_SA(-1) ”
（３） ”estimate ”で ”system estimation ”を開き、推定方法を選ぶ。

［6］変数の外生性　　以下の説明は Maddala(1992)の第 8、9 章に基づく。

先決性：ある変数が特定の方程式の現在と将来の誤差項と独立であるとき、その変数は当該方程式で先決変数になる。
厳密な外生性：ある変数が現在、将来および過去の誤差項と独立であるとき、厳密に外生的である。

モデル１
$$y_t = a_1 x_t + b_{11}y_{t-1} + b_{12}x_{t-1} + u_{1t}$$
$$x_t = a_2 y_t + b_{21}y_{t-1} + b_{22}x_{t-1} + u_{2t}$$
u_{1t}, u_{2t} は互いに独立で、系列相関なし

・$a_2 = 0$ ならば、x_t は最初の方程式で y_t に関して先決変数
・$a_2 = 0$ かつ $b_{21} = 0$ ならば、x_t は y_t に関して厳密に外生的

グランジャーの因果関係

一般的定義： y_{t+n} の予測を行う際に、t 期で利用可能なすべての情報を用いて予測を行った場合の平均２乗誤差と利用可能なすべての情報から z_t に関する情報を除いた残りの情報を用いて予測を行った場合の平均２乗誤差が等しい場合、グランジャーの意味で z_t から y_t への因果関係がないという。

２変量 VAR モデル、

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + \cdots + a_{1p}y_{t-p} + b_{11}z_{t-1} + \cdots + b_{1p}z_{t-p} + e_{1t}$$
$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + \cdots + a_{2p}y_{t-p} + b_{21}z_{t-1} + \cdots + b_{2p}z_{t-p} + e_{2t}$$

では、グランジャーの意味で z_t から y_t への因果関係がないための必要十分条件は、

$$b_{1k} = 0,\quad k = 1,2,,\cdots p \tag{6}$$

（６）式を帰無仮説としてＦテストを行えばよい。

グランジャーの非因果性と外生性の関係

$\boxed{\text{モデル１}}$の誘導形を求める。

$$y_t = \pi_{11}y_{t-1} + \pi_{12}x_{t-1} + v_{1t}$$
$$x_t = \pi_{21}y_{t-1} + \pi_{22}x_{t-1} + v_{2t}$$

$\pi_{21} = \dfrac{a_2 b_{11} + b_{21}}{1 - a_1 a_2}$ なので、$\pi_{21} = 0$ つまりグレンジャーの非因果性は $a_2 = 0$ つまり先決性を意味しない。ただし、$a_2 = 0, b_{21} = 0$ のときは、$\pi_{21} = 0$ となる。

EViews の操作(6)

（１）”workfile”の”model01”をクリックして”variables”を選択。
（２）”procs”→”make group/table”を選択。
（３）”actuals”だけをチェックして”OK”
（４）”views”で”granger causality”を選択、ラグの長さを入力して”OK”。

参考文献

(1) Fravero,C.A.(2001), *Applied Macroeconometrics*, Oxford Univ. Press.
(2) Greene, W.H.(2000), *Econometric Analysis*, 4th edition, Prentice-Hall Inc.
(3) Hayashi,F.(2000), *Econometrics*, Princeton Univ.Press.
(4) Maddala,G.S.(1992), *Introduction to Econometrics*, 2nd edition, Prentice-Hall Inc.
(和合肇訳『計量経済分析の方法』シーピーエー出版)
(5) 伴金美(1991)『マクロ計量モデル分析』有斐閣
(6) 牧厚志『応用計量経済学入門』(2001)日本評論社、第６章、第７章
(7) 松浦克巳・コリン＝マッケンジー(2001)『EViews による計量経済分析』