10/29/03

計量経済モデル　研修資料（２）

・ラグ付き従属変数と操作変数　以下の説明は Greene(2000) ch.13 に基づく。

Hatanaka の２段階推定

$y_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$

（１） y_t を x_t, x_{t-1} に回帰した理論値を y_{t-1} の操作変数とする。

（２）残差から $\hat{\rho}$ を計算して変数変換。$y_t - \hat{\rho}\, y_{t-1}$ を $\mathbf{x}_t - \hat{\rho}\mathbf{x}_{t-1}$, $y_{t-1} - \hat{\rho}\, y_{t-2}$　および

$\hat{\varepsilon}_{t-1} = y_{t-1} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}\mathbf{x}_{t-1} - \hat{\gamma}_{IV}\, y_{t-1}$　に回帰して、$\hat{\varepsilon}_{t-1}$ の係数を d としたとき、ρ の有効推定量は、

$\hat{\hat{\rho}} = \hat{\rho} + d$

・和分

和分：非定常な系列が、ｄ回の階差をとることによって定常系列になるとき、その系列は次数ｄの和分であると呼ばれ、$X_t \sim I(d)$ で表される。

例えば、ランダム・ウォークは $I(1)$、ホワイト・ノイズは $I(0)$

ある系列の和分の次数を決定するには、単位根検定を行えばよい。

$\Delta X_t = \mu + \beta t + \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$

を使って検定して単位根の存在が棄却されれば $X_t \sim I(0)$、棄却されなければ

$\Delta^2 X_t = \mu + \beta t + \rho \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t$

を使って検定。棄却されれば $X_t \sim I(1)$、棄却されなければ同様に次のステップへ進む。

・共和分

［１］ほとんどの経済時系列データは１あるいは２の和分の次数を持つ。

［２］見せかけの回帰（spurious regression）

$X_t \sim I(1), Y_t \sim I(1)$ で互いに独立とき、

$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$

を推計すると、高い決定係数と低いダービン・ワトソン比が得られ、帰無仮説 $\beta = 0$ が棄却されやすくなる。

［３］一般には、$X_t \sim I(1), Y_t \sim I(1)$ のときにはその１次結合も次数１の和分である。

しかし、例えば $Y_t - \alpha - \beta X_t = \varepsilon_t \sim I(0)$ となる場合がある。このとき、Y_t と X_t は共和分であるという。

［４］Y_t と X_t が共和分しているとき、$Y_t = \alpha + \beta X_t$ は長期の安定的な関係であると解釈できる。逆に、$Y_t - \alpha - \beta X_t = \varepsilon_t \sim I(1)$ であれば、誤差項はいつ０にもどってくるかわからない不安定な動きをするので、回帰式は安定的な関係とはいえなくなる。なお、ここでの長期の安定的関係は長期均衡といった解釈をされることもあるが、必ずしもそのような関係だけを意味するわけではない。

［５］なお、Y_t と X_t が共和分するには、両変数の和分の次数は同じでなければならない。

・同時方程式バイアスと共和分　(Greene(2000), ch.18 および畠中(1996)、第４章を参照せよ)

共和分の関係にある変数どうしの回帰では、独立変数と攪乱項のとの間に相関があっても OLS は一致推定量である。また、OLS 推定量は super consistent。

・２変量VARモデル　以下の説明はEnders(1995),ch.5に基づく。

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_{20} - b_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \qquad (1)$$

1．y_t, z_t は定常時系列
2．$\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}$ は分散がそれぞれ σ_y, σ_z のホワイトノイズ
3．$\{\varepsilon_{yt}\}$ と $\{\varepsilon_{zt}\}$ は互いに無相関

このモデルの誘導型は、

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t}$$
$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t} \qquad (2)$$

誤差項 e_{1t}, e_{2t} は平均０、分散一定で系列無相関であるが、$b_{12} = b_{21} = 0$ でない限り共分散は０ではない。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(e_{1t}) & \mathrm{cov}(e_{1t}, e_{2t}) \\ \mathrm{cov}(e_{1t}, e_{2t}) & \mathrm{var}(e_{2t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1{}^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2{}^2 \end{bmatrix}$$

推定

変数間の同時性の問題があるので、VARモデルの推定は（１）式の構造型ではなく（２）式の誘導型を用いて行われる。また、多くの経済変数は $I(1)$ なので、推定は階差をとった形で行われることが多いが、水準での関係が全く考慮されない点が問題である。後述する VER モデルはこの点が改善される。

安定性と定常性

２変量VARモデルの安定性の条件は $(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2$ の根がunit circleの外にあること。

識別

（１）式の構造型は 10 個のパラメターを含んでいる。一方（２）式の標準型（誘導型）を推定することで得られる推定値は９個しかない。したがって、（１）式のパラメターに１つの制約を課すと、構造パラメターはちょうど識別される。

（１）式で、$b_{21} = 0$ という制約を課す。この制約は、z_t は y_t に対して瞬時に（同じ時点で）影響を与えるが、y_t は z_t の系列に対してラグを持って影響を与えるということを意味する。

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_{20} + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \qquad (3)$$

誘導型は、

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} - b_{12}b_{20} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} - b_{12}\gamma_{21} & \gamma_{12} - b_{12}\gamma_{22} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

ここで、誘導型パラメターと構造型パラメターの間に、次の９本の式が成立するので、構造パラメターをすべて求めることができ、かつ、構造型の攪乱要因 $\{\varepsilon_{yt}\}, \{\varepsilon_{zt}\}$ を復元することもできる。

$$a_{10} = b_{10} - b_{12}b_{20} \quad , \quad a_{11} = \gamma_{11} - b_{12}\gamma_{21} \quad , \quad a_{12} = \gamma_{12} - b_{12}\gamma_{22}$$
$$a_{20} = b_{20} \quad , \quad a_{21} = \gamma_{21} \quad , \quad a_{22} = \gamma_{22}$$
$$Var(e_1) = \sigma_y^2 + b_{12}^2\sigma_z^2 \quad , \quad Var(e_2) = \sigma_z^2 \quad , \quad Cov(e_1, e_2) = -b_{12}\sigma_z^2$$

・インパルス応答関数

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$$

$[y_{t-1}, z_{t-1}]'$ 逐次代入することによって、次のような VMA 表現を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty}\begin{bmatrix} \phi_{11}(i) & \phi_{12}(i) \\ \phi_{21}(i) & \phi_{22}(i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-i} \\ \varepsilon_{zt-i} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ただし、$\phi_{jk}(i)$ を要素とする行列ϕ_i は、

$$\phi_i = \left[A_1^i / (1 - b_{12}b_{21})\right]\begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\phi_{jk}(0)$ は、構造イノベーション$\varepsilon_{yt}, \varepsilon_{zt}$ が y_t, z_t に同時点で与える影響の大きさを表し、インパクト乗数と呼ばれる。また、$\sum_{i=0}^{n}\phi_{jk}(i)$ はn 期後までの累積効果の大きさを表し、$n \to \infty$ のとき長期の乗数になる。i に依存する係数$\phi_{jk}(i)$ はインパルス応答関数と呼ばれる。インパルス応答関数を求めるには、やはり識別のための制約が必要である。すでに述べたような$b_{21} = 0$ という制約（コレスキー分解）を課すことは、変数間の「順序づけ」を意味する。

$$e_{1t} = \varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}$$
$$e_{2t} = \varepsilon_{zt}$$

となるので、z の構造イノベーションε_{zt} はz と y の双方に瞬時的な影響を与えるが、y の構造イノベーションε_{yt} はz には瞬時的な影響は与えない。したがって、z はy に「先行」する。

変数の「順序づけ」をどうするかということが問題になる。ただし、誘導型イノベーション$e_{1t}, e_{2,t}$ の相関係数が小さな値であれば深刻な問題にはならない。実際には、順序を入れ替えたことによって結果がどのくらい影響を受けるかを確認することが必要である。

参考文献追加

畠中道雄(1996)『計量経済学の方法：改訂版』創文社

Enders, W.(1995), *Applied Econometric Time Series*, John Wiley & Sons, Inc.