02.3. 公理論的指数論とディヴィジア指数

前回ミクロからマクロへということで財の集計について経済学的アプローチから議論をし、その評価を試みた。今回は財の集計化についての異なるアプローチとして公理論的アプローチを説明しよう。その目的はディヴィジア積分指数を理解することにある。ディヴィジア積分指数は技術進歩その他でよく用いられるのでその意味を理解しておく必要がある。

公理論的アプローチ

前回の講義は財の集計の経済学的意味を考えた。その結論は一般に相似拡大的選好を持つ代表的個人が考えられるとき、自然な財の集計が可能であり、集計された財に対応するのが実は効用なのであることを説明した。そしてそれを達成するために必要な効用単位あたり支出が価格水準ということになる。しかし相似拡大的選好の仮定のもとでは、所得にそれぞれの財の消費の相対的な水準が依存しないことになるが、これは現実には合わないことも指摘した。そしてもし選好の相似拡大性が成立しないときどうなるかを議論し、効用不変物価指数と実質物価指数を説明した。

今日の講義では公理論的アプローチについて議論を展開する。公理論的アプローチは統計学の世界での特有な思考方法をに基づいている。すなわち物価水準というものに対して「真の物価水準」が存在すると考えるのである。我々がみている物価とは真の物価水準に何かエラーがついた観測値であると考えるのである。これらのアイディアは古くはエッジワース、ボウレイなどが提唱していた歴史のある考え方であり、物価指数だけでなく他の分野でも繰り返し現れる。

この考え方に特徴的な方法論は、価格水準や消費水準に経済学的な意味を与えるといったやり方とは異なり、公理（真の物価水準ならばこういう性質を持っていなければならないといった公理）をたて、それを満たすものを探すという方法である。つまりある指数が持つべき特質を列挙し、実際の指数をそれによって評価するということになる。このような公理論的手法は経済学においても効用関数の存在を示すために用いられいる。

ここで「公理」と「テスト」を区別しよう。公理（axiom）は、価格指数が必ず持つべき性質である。それに対してテスト（test）とは、公理ほどは強くないが持った方がよい性質である。

本章の目的は、ディヴィジア積分指数の概念を紹介することにある。前回議論したラスパイレス、パーシェ指数に関しては、ここで公理とテストを用いて評価し、指数が持つべき性質について、実は満たしていない部分があることを示す。それに対してディヴィジア積分指数は望ましい性質をすべて持っていることを示そう。その前に公理とテストについて、具体的に説明しなければならない。

今

(x_0, p_0):　基準時点の数量と価格（ベクトル）

(x_1, p_1):　比較時点の数量と価格（ベクトル）

$P(x_0, p_0, x_1, p_1)$　両時点の数量と価格に依存する関数

とする。

$P(x_0, p_0, x_1, p_1)$が価格指数となる条件（５公理）

$P(x_0, p_0, x_1, p_1)$が以下の５つの公理を満たすなら、それは価格指数である。

公理１：単調性(monotonicity axiom)

比較時点価格体系, p_1 に対して厳密に増加、すなわち

$$P(x_0, p_0, x_1, p_1) > P(x_0, p_0, x_1, p_1') \quad \text{if} \quad p_1^j \geq p_1^{j'} \text{ for all } j;\ p_1^j > p_1^{j'} \text{ for some } j$$

をみたし、基準時点価格体系 p_0 に対して厳密に減少すなわち

$$P(x_0, p_0, x_1, p_1) < P(x_0, p_0', x_1, p_1) \quad \text{if} \quad p_0^j \geq p_0^{j'} \text{ for all } j;\ p_0^j > p_0^{j'} \text{ for some } j$$

公理２：一次同次性（linear homogeneity axiom）

比較時点価格体系, p_1 を全部についてλ倍したとき$P(x_0, p_0, x_1, p_1)$もλ倍になる。

$$P(x_0, p_0, x_1, l p_1) = l P(x_0, p_0, x_1, p_1)$$

公理３：恒等性（identity axiom）

価格が変化しなければ価格指数は１である。（価格指数は価格の変化を表していることに注意。）

$$P(x_0, p_0, x_0, p_0) = 1$$

公理４：次元性（dimensionality axiom）

例えば10円を100円に読み替えても指数は変化しない。

$$P(x_0, l p_0, x_1, l p_1) = P(x_0, p_0, x_1, p_1)$$

公理５：通約性 (commensurability axiom)

財の計量単位の変化はindexに影響ない。例えば１キログラムを１グラムに替えても指数は変化しない。

$$P\left(\left(\frac{x_0^{\ 1}}{l_1},\cdots,\frac{x_0^{\ n}}{l_n}\right),(l_1 p_0^{\ 1},\cdots,l_n p_0^{\ n}),\left(\frac{x_1^{\ 1}}{l_1},\cdots,\frac{x_1^{\ n}}{l_n}\right),(l_1 p_1^{\ 1},\cdots,l_n p_1^{\ n})\right)$$
$$=P\left(\left(x_0^{\ 1},\cdots,x_0^{\ n}\right),(p_0^{\ 1},\cdots,p_0^{\ n}),\left(x_1^{\ 1},\cdots,x_1^{\ n}\right),(p_1^{\ 1},\cdots,p_1^{\ n})\right)$$

明らかにこれら１～５の公理は価格指数として最低満たすべき必要条件である。ラスパイレス物価指数、パーシェ物価指数、幾何平均物価指数、フィッシャーの「理想価格指数（ラスパイレスとパーシェの幾何平均）」など実用上用いられている価格指数はすべてこの５公理を満たしている。

価格指数に対応する数量指数の定義

価格指数$P(x_0, p_0, x_1, p_1)$**に対応する数量指数**$X(x_0, p_0, x_1, p_1)$**は次のように定義する。**

$$X(x_0, p_0, x_1, p_1) \equiv P(p_0, x_0, p_1, x_1)$$

すなわち、価格と数量が同じ関数形を持ち価格と数量が入れ替わったものを価格指数に対応する数量指数と定義するのである。

指数のテスト

次に指数が満足すべき望ましい性質であるテストをみてみよう。

テスト１：循環テスト（circular test）:推移率が成立する

$$P(x_0, p_0, x_1, p_1)\cdot P(x_1, p_1, x_2, p_2) = P(x_0, p_0, x_2, p_2)$$

1960**年から**1970**年への変化を示す価格指数と**1970**年から**1980**年への変化を示す価格指数を掛け合わせると**1960**年から**1980**年への価格指数の変化になっているという性質である。各時点での価格が多時点間で整合性を持つために必要な条件であり、指数が持つべき性質といえよう。**

テスト２：要素逆転テスト（factor reversal test）：価格指数と数量指数とを掛けると総支出の比になる。

$$P(x_0, p_0, x_1, p_1)\times X(x_1, p_1, x_1, p_1) = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_1^{\ j} x_1^{\ j}}{\sum_{j=1}^{n} p_0^{\ j} x_0^{\ j}}$$

これは価格と数量の両指数の積が支出になるという指数の持つべき性質である。

ここで上記テストはこれまで出てきた指数について満たされているだろうか。ラスパイレス、パーシェについては、(1),(2)のテストとも満たしていない。２回目の講義で明らかになったのは、ラスパイレスの価格指数とパーシェの数量指数を掛け合わせると総支出になるという関係（逆も同じ）にすぎない。

次に幾何平均指数は(1)は満足するが(2)は満足しないし、フィッシャー指数は(2)は満足するが(1)は満足しないのである。実は、任意の二時点について先述した５つの公理と(1)と(2)を同時に満たすような価格指数は存在しないことがわかっている。更に一般的に、次のような「不存在」定理が知られている。

不存在定理(non-existence theorem)

任意の二時点についてlinear homogeneity axiomとcircular testとfactor reversal testのすべてを満たすような価格指数（それに対応する数量指数）は存在しない。もしcircular testとfactor reversal testのどちらか一方を落とせば、残りを満たす価格指数（数量指数）は存在する。

この不存在定理は、任意の二時点について価格指数と数量指数についての５つの公理と２つのテストを満たすものが存在しないことを示している。これは極めて不都合な結果である。というのは５つの公理と２つのテストは価格指数、数量指数が当然満たしていなければならないあるいは満たすのが望ましい性質と考えられるからである。

これに対して「任意の二時点」ではなく「隣接する二時点」に制限してさらに隣接する二時点をどんどん近づけていったらどうか。次にみるディヴィジア積分指数は、このアイデアに基づいている。

ディヴィジア積分指数（Divisia index）

ディヴィジア積分価格指数は、価格指数の上昇率をそれぞれの価格の上昇率の加重平均として定義する。上昇率の加重平均のウェートとしてその時点での支出比をとる。これを 0 から t まで積分したのがディヴィジアの積分指数である。価格指数と数量指数は価格と数量を入れ替えればよいわけであるから、数量指数は数量の成長率の加重平均（ウェートはその時点での支出比）を時間を通じて積分したものである。

形式的には、ディヴィジア積分指数は以下のように定義される。0 から t までのデータに基づくディヴィジア価格指数$P_0(t)$とディヴィジア数量指数$X_0(t)$は

$$P_0(t) \equiv \exp\left[\int_0^t \left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_t{}^j x_t{}^j}{\sum_{k=1}^{n} p_t{}^k x_t{}^k}\right)\frac{\dot{p}_t{}^j}{p_t{}^j}\right\}dt\right]$$

$$X_0(t) \equiv \exp\left[\int_0^t \left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_t{}^j x_t{}^j}{\sum_{k=1}^{n} p_t{}^k x_t{}^k}\right)\frac{\dot{x}_t{}^j}{x_t{}^j}\right\}dt\right]$$

である。ここで変数 z について

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

である。つまり時間についての微分を上つきドットで表す。従って

$$\frac{\dot{p}_t{}^j}{p_t{}^j} = j\text{番目の価格の}\,t\,\text{期変化率であり、}$$

$$\frac{\dot{x}_t{}^j}{x_t{}^j} = j\text{番目の数量の}\,t\,\text{期変化率である。}$$

この積分型だとわかりにくいのでその変化率でみると

$$\frac{\dot{P}_0(t)}{P_0(t)} = \frac{d\log P_0(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_t{}^j x_t{}^j}{\sum_{k=1}^{n} p_t{}^k x_t{}^k}\right)\frac{\dot{p}_t{}^j}{p_t{}^j}$$

$$\frac{\dot{X}_0(t)}{X_0(t)} = \frac{d\log X_0(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{p_t{}^j x_t{}^j}{\sum_{k=1}^{n} p_t{}^k x_t{}^k}\right)\frac{\dot{x}_t{}^j}{x_t{}^j}$$

循環テストとディヴィジア指数

ここでディヴィジア積分指数のアイディアを理解するために循環テストcircular testと要素逆転テストfactor reversal testのチェックを行うことにする。その前にまず支出比$V_0(t)$を定義しよう。$V_0(t)$は t 期の支出と 0 期の支出の比である。

$$V_0(t) \equiv \frac{\sum_{j=1}^{n} p_t{}^j x_t{}^j}{\sum_{j=1}^{n} p_0{}^j x_0{}^j}$$

まず循環テストcircular testが成立するための条件をみてみよう。定義から$\log P_0(t) = \log P_0(t') + \log P_{t'}(t)$と$\log X_0(t) = \log X_0(t') + \log X_{t'}(t)$がすべての$0 < t' < t$で成立する必要がある。したがって

$$\log P_0(t) = \sum_{t=0}^{t-1} \log P_t(t+1) = \sum_{t=0}^{t-1} \left\{ \log P_0(t+1) - \log P_0(t) \right\}$$

と

$$\log X_0(t) = \sum_{t=0}^{t-1} \log X_t(t+1) = \sum_{t=0}^{t-1} \left\{ \log X_0(t+1) - \log X_0(t) \right\}$$

が成立しなければならない。これは期間のとり方を細分化して積分で連続形にすると

$$\log P_0(t) = \int_0^t \frac{d \log P_0(t)}{dt} dt = \int_0^t \frac{\dot{P}_0(t)}{P_0(t)} dt$$

$$\log X_0(t) = \int_0^t \frac{d \log X_0(t)}{dt} dt = \int_0^t \frac{\dot{X}_0(t)}{X_0(t)} dt$$

となる。ディヴィジア指数は定義からきれいにこの推移率を満たすことがわかる。

ディヴィジア積分指数は、二時点、例えば1960年と1970年の２期間をとると推移率は成立しなくてもこの10年を１年ごとさらには１カ月ごとに分けることによって推移率を満たそうというアイディアである。

要素逆転テストとディヴィジア指数

同じようなアイデアで要素逆転テストfactor reversal test**も満足することを次に示そう。要素逆転テスト**factor reversal test**が成立するためには定義から**

$$V_0(t) = P_0(t) X_0(t) \qquad \text{for all } t$$

となる必要がある。この両辺の対数をとって時間(t)**で微分すると、つまり変化率をとると**

$$\frac{\dot{V}_0(t)}{V_0(t)} = \frac{\dot{P}_0(t)}{P_0(t)} + \frac{\dot{X}_0(t)}{X_0(t)}$$

一方 $V_0(t) = \Sigma_j p_t^{\ j} x_t^{\ j}$ **だから** $\dot{V}_0(t) = \Sigma_j \dot{p}_t^{\ j} x_t^{\ j} + \Sigma_j p_t^{\ j} \dot{x}_t^{\ j}$ **を得る。そこで両辺を** $V(t)$ **で割って整理すれば**

$$\frac{\dot{V}_0(t)}{V_0(t)} = \left(\frac{p_t^{\ j} x_t^{\ j}}{\sum_{k=1}^{n} p_t^{\ k} x_t^{\ k}} \right) \frac{\dot{p}_t^{\ j}}{p_t^{\ j}} + \left(\frac{p_t^{\ j} x_t^{\ j}}{\sum_{k=1}^{n} p_t^{\ k} x_t^{\ k}} \right) \frac{\dot{x}_t^{\ j}}{x_t^{\ j}}$$

を得る。他方ディヴィジア積分指数の定義から

$$\frac{\dot{P}_0(t)}{P_0(t)} = \left(\frac{p_t^{\ j} x_t^{\ j}}{\sum_{k=1}^{n} p_t^{\ k} x_t^{\ k}} \right) \frac{\dot{p}_t^{\ j}}{p_t^{\ j}}$$

$$\frac{\dot{X}_0(t)}{X_0(t)} = \left(\frac{p_t^{\ j} x_t^{\ j}}{\sum_{k=1}^{n} p_t^{\ k} x_t^{\ k}} \right) \frac{\dot{x}_t^{\ j}}{x_t^{\ j}}$$

なので、要素逆転テストfactor reversal test**を満足していることがわかる。**

離散データを使う場合

ディヴィジア積分指数は、文字通り積分指数であるから、データが離散時点でしかない場

合（たいていの経済データはそうであるが）、そのままの形では作ることが出来ない。そこでこうした場合は以下のような離散近似式が用いられる。但しここで $z \approx 0 \Rightarrow \log(x-1) \approx x$ の近似式を用いている。

$$P_0(t) \approx \prod_{s=0}^{t-1} P_{L_{s,s+1}} \quad \text{但し} \quad P_{L_{s,s+1}} = \sum_i \frac{p_s{}^i x_s{}^i}{\sum_j p_s{}^j x_s{}^j}\left(\frac{p_{s+1}{}^i}{p_s{}^i}\right)$$

$$X_0(t) \approx \prod_{s=0}^{t-1} X_{L_{s,s+1}} \quad \text{但し} \quad X_{L_{s,s+1}} = \sum_i \frac{p_s{}^i x_s{}^i}{\sum_j p_s{}^j x_s{}^j}\left(\frac{x_{s+1}{}^i}{x_s{}^i}\right)$$

評価

ディヴィジア指数のアイディアを整理してみよう。ラスパイレスやパーシェ指数は二時点間の価格の変化を調べ指数化したものであったが、整合性の面で問題があった。ディヴィジア指数では同じ二時点間をさらに細分化してみていくことで整合性を持つような指数が作成可能になった。したがって各種の経済統計の教科書でも、また実際の運営上からもディヴィジア積分指数の使用が望ましいとされている。

しかしこのディヴィジア積分指数にも問題がある。それは極端に多くのデータを必要とすることである。例えば二時点を仮に紀元前1000年と紀元後2000年として指数を作ることにする。ラスパイレスやパーシェの指数であれば極端な話、紀元前1000年と紀元後2000年の価格と数量があれば作成できるが、ディヴィジア指数の場合その間の年次のデータがすべて必要になってくるのである。

しかもディヴィジア指数の場合紀元前1000年と紀元後2000年の時点間での価格や数量変化の「経路」が重要となる。紀元前1000年から紀元後1999年まで価格に変化がなく最後の１年で突然上がるケースと紀元前1000年から紀元後2000年まで緩やかに価格が上昇するケースでは算出されたディヴィジア指数に違いが生じてしまう。つまりディヴィジア積分指数の場合二時点間だけの情報ではだめでその間に経済がどのような変化をしてきたかの情報が必要となる。よってディヴィジアの積分指数を作るには大変な作業を必要とされ、時間と費用の問題からディヴィジア積分指数はそれほどポピュラーではない。

そうすると次に考えられることは、ディヴィジア指数の場合二時点間ですべての経路を知る必要があるが、しかしそれが二時点だけわかっていた場合と同じになるのはどういうときかということである。つまり、ディヴィジア指数が経路に依存せず、二時点のデータにのみ依存する（これをpath-independentという）のはどういうときかという問題である。もしpath-independentならディヴィジア指数の一次近似としてラスパイレス指数等を用いる根拠が出てくる。

そこでディヴィジア積分指数がpath-independentになる､つまり二時点間でその２点の情報だけでディヴィジア指数がユニークに決まるための条件をみてみよう。この場合データを作り出している効用関数が一次同次で「集計可能」であることが必要十分条件であることが知られている。これは実は家計の場合の相似拡大的な選好と対応しているのである。つまり経済学的アプローチと公理論的・数学的アプローチを突き詰めていくと両者が密接に関連していることがわかる。

ここで集計化の問題の整理をしておく。すべての人の選好が同じ相似拡大的であると考えたとき、つまり価格、財空間全域で代表的個人が想定できるとき、効用が一種の財のかたまり(aggregater と呼ばれる)であると考えることが出来、効用一単位あたりの支出が、価格水準であると考えられることを述べた。また選好が相似拡大的でない場合にも若干の修正のもとでラスパイレスやパーシェ指数が意味を持つことを述べた。しかし実際は選好の同一性を仮定するのは非常に難しいし、その場合これまでの議論は成立しない。これに対して公理論的アプローチは何か実体を示すのではなく、公理の立場から真の指数の満たすべき条件を示しその条件のもとでどういった指数が考えられるか議論した訳である。ここで一番望ましい指数というのがディヴィジア積分指数であった。しかしディヴィジアの積分指数はデータに関して非常に強い要求がある。そしてこの要求の少ないケースというのが前に述べた人々の選好が一次同次で同一であると仮定した経済学的アプローチと同じ形となることを示した。これが経済指数のミクロ基礎理論の現状である。したがって通常はラスパイレス、パーシェ指数を使いながらこれらの指数の持つ様々な問題を理解し必要悪として認識しながら使用すべきであろう。